

## MATHEMATICAL DESCRIPTION OF MARINE MECHANICAL SYSTEMS WITH ELASTIC BONDS

**A. V. Saushev, V. V. Gavrilov, V. L. Erofeev**

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,  
St. Petersburg, Russian Federation

*The study examines the possibility of applying electrical circuit analysis methods to the mathematical description of marine mechanical systems. It is shown that marine mechanical systems constitute key components of marine power plants and electric drive systems and are characterized by significant structural diversity and complexity due to the presence of elastic bonds and vibration damping. It is demonstrated that the computational schemes of mechanical systems can be represented in the form of chain operator circuits that are structurally analogous to electrical circuits and consist of mechanical impedances and admittances. Equations describing the dynamics of mechanical systems in terms of these impedances and admittances are derived. In such circuit representations, angular velocities of rotating masses play the role of currents, while torques acting in elastic bonds correspond to voltages. It is established that representing mechanical systems as chain mechanical circuits enables the use of calculation methods well known from electrical circuit theory for their mathematical description. Loop and nodal equations of mechanical systems are obtained and analyzed using the example of a three-mass mechanical system. The possibility of applying the equivalent generator method to derive analytical relationships for an arbitrary rotating mass and an elastic bond is considered. Examples of the application of this method to two-mass and three-mass mechanical systems are presented. It is noted that the two-mass mechanical system is a widely used model in the analysis of mechanical system dynamics, and various forms of its mathematical representation that are of practical importance are obtained. The frequency-domain analysis of a two-mass mechanical system based on the derived mathematical description is also discussed.*

*Keywords: marine mechanical systems; marine electric drive; mathematical modeling; loop equations; nodal equations; equivalent generator method.*

**For citation:**

Saushev, Alexander V., V. V. Gavrilov, V. L. Erofeev. "Application of experimental planning methods for the analytical description of marine electromechanical systems." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admiral S. O. Makarova* 17.6(2025): 924–939. DOI: 10.21821/2309-5180-2025-17-6-924-939.

**УДК 629.12; 004.942**

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СУДОВЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

**А. В. Саушев, В. В. Гаврилов, В. Л. Ерофеев**

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С.О. Макарова»,  
Санкт-Петербург, Российская Федерация

*Темой исследования является рассмотрение возможности использования методов анализа электрических цепей применительно к судовым механическим системам. Показано, что судовые механические системы являются важнейшими элементами судовых энергетических установок и электроприводов. Отмечается, что судовые механические системы характеризуются большим разнообразием и сложностью построения, обусловленной наличием упругих связей и демпфированием колебаний. Продемонстрировано, что расчетные схемы механических систем могут быть представлены в виде цепных операторных схем, которые аналогичны по своей структуре электрическим цепям и состоят из механических сопротивлений и проводимостей. Получены уравнения, описывающие динамику механических систем в терминах механических сопротивлений и проводимостей. Показано, что роль токов в таких цепных схемах играют угловые скорости вращающихся масс, а роль напряжений играют моменты в упругих связях. Установлено, что представление механических систем в виде цепных механических схем позволяет для их математического описания использовать известные из теории электрических цепей методы расчета. Получены контурные и узловые*

уравнения механических систем, которые рассмотрены на примере трехмассовой механической системы. Рассмотрена возможность применения метода эквивалентного генератора для получения формульных зависимостей применительно к одной произвольной вращающейся массе и упругой связи. Рассмотрены примеры применения этого метода для двухмассовой и трехмассовой механических систем. Отмечается, что двухмассовая механическая система является широко распространенной моделью при исследовании динамики механических систем. Получены различные формы математических моделей двухмассовой механической системы, которые находят широкое практическое применение. Рассмотрен анализ двухмассовой механической системы частотным методом на основе полученного математического описания.

**Ключевые слова:** судовая энергетическая система, судовый электропривод, математическое описание, механическая система, контурные уравнения, узловые уравнения, метод эквивалентного генератора, расчетная схема, упругие элементы, матрица.

**Для цитирования:**

Саушев А. В. Математическое описание судовых механических систем с упругими связями / А. В. Саушев, В. В. Гаврилов, В. Л. Ерофеев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2025. — Т. 17. — № 6. — С. 924–939. DOI: 10.21821/2309-5180-2025-17-6-924-939. — EDN RVLGDN.

### **Введение (Introduction)**

Объектом исследования в работе являются разнообразные по своему функциональному назначению судовые механические системы (МС), которые в своем большинстве составляют основу судовых энергетических установок и электроприводов. Судовые МС включают элементы, связанные с двигателями, передачами, трубопроводами и системами управления. В составе судовых энергетических установок эти системы предназначены для обеспечения движения судна с заданной скоростью, а также для снабжения энергией различных механизмов, систем и устройств. В составе электроприводов они обеспечивают приведение в движение исполнительного органа рабочей машины и управление этим движением. В большинстве МС являются многомассовыми, поскольку содержат элементы с упругими связями, которые создают демпфирующие моменты вязкого трения. К таким элементам, например, относятся муфты, амортизаторы, пружины, валы, пневмоэлементы.

МС судовых установок весьма многообразны и выполняют различные функции. Их исследованию посвящены многие работы [1–4]. Анализ показал [5, 6], что процессы, протекающие в МС, являются сложными и многофакторными. Большое место в исследованиях судовых МС занимают вопросы их анализа и синтеза [4, 7, 8]. В последнее десятилетие повышенный интерес наметился в вопросах оценки надежности, включая техническое диагностирование [9–11]. Для решения рассмотренных задач необходимо наличие математических моделей МС [12–17]. При составлении математического описания МС удобно рассматривать эти системы по аналогии с электрическими системами в виде цепных схем, состоящих из активных и пассивных элементов [18–21].

Целью статьи является математическое описание многомассовых механических систем судовых установок методом электрической аналогии, что позволяет использовать хорошо разработанные методы анализа электрических цепей.

### **Методы и материалы (Methods And Materials)**

При математическом описании судовых механических систем методом электрической аналогии необходимо выделить элементы расчетных схем и их параметры. При этом следует различать активные и пассивные элементы. *Активные элементы* — это источники, которые вносят энергию в физическую систему. В электрических системах это источники ЭДС и источники токов, в механических системах — источники силы и источники линейной скорости для поступательного движения, источники момента и источники угловой скорости для вращательного движения. Источник силы (момента) — это приложенная к системе заданная внешняя сила (момент), источник скорости — заданная линейная (угловая) скорость тела. *Пассивные элементы* — это элементы, которые либо накапливают энергию, либо отводят ее из системы. В электрических системах это резисторы, индуктивности и конденсаторы, в механических системах — массы, пружины и механические сопротивления.

Во вращающихся и поступательно движущихся МС параметрами являются: масса, момент инерции, коэффициент жесткости и коэффициент демпфирования. Масса характеризует элемент, обладающий инерцией. Этот пассивный элемент накапливает кинетическую энергию движения и обозначается как  $m$ , кг. Момент инерции характеризует кинетическую энергию при вращении и обозначается как  $J$ ,  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Коэффициент жесткости характеризует свойство упругости пружины, вращающихся валов, канатов и т. п. Этот пассивный элемент накапливает потенциальную энергию и обозначается как  $c$ . При этом его размерность зависит от вида источника силы, например, для сил кручения —  $\text{Н} \cdot \text{м}/\text{рад}$ . Величина, обратная жесткости,  $e = 1/c$ , называется *податливостью*. Коэффициент демпфирования характеризует свойства устройств, которые определяют вязкое трение, преобразуя кинетическую энергию в тепло, и обозначается как  $\beta$ ,  $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{рад}$ . В зависимости от вида трения коэффициент демпфирования может иметь и другие названия, например, коэффициент внутреннего вязкого трения.

Рассмотрим общий случай математического описания многомассовой МС, содержащей упругие звенья и элементы, создающие демпфирующие моменты вязкого трения [20]. Пусть все вращающиеся массы соединены последовательно с помощью промежуточных упругих элементов, при этом расчетная схема МС будет иметь вид рис. 1.

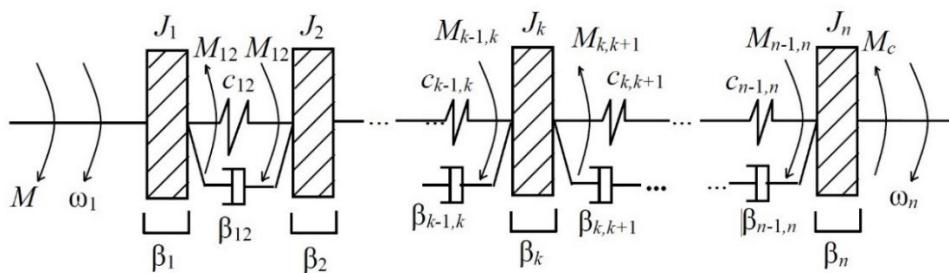


Рис. 1. Полная расчетная схема судовой механической системы

Общее число вращающихся масс равно  $n$ , число упругих элементов —  $n-1$ . Рассмотрим одно произвольное звено данной системы. На массу с моментом инерции  $J_k$  действуют следующие моменты:

1) *потенциальные (активные, упругие, консервативные) моменты:*

$$M_{\varphi_{k-1,k}} = c_{k-1,k} (\varphi_{k-1} - \varphi_k) = \frac{c_{k-1,k} (\omega_{k-1} - \omega_k)}{p};$$

$$M_{\varphi_{k,k+1}} = c_{k,k+1} (\varphi_k - \varphi_{k+1}) = \frac{c_{k,k+1} (\omega_k - \omega_{k+1})}{p};$$

2) *реактивные (диссипативные) моменты:*

— моменты вязкого трения в упругих связях:

$$M_{\text{тпк}-1k} = \beta_{k-1,k} (\omega_{k-1} - \omega_k);$$

$$M_{\text{тпк},k+1} = \beta_{k,k+1} (\omega_k - \omega_{k+1});$$

— момент вязкого трения в элементах, составляющих  $k$ -ю массу:

$$M_{\text{тпк}} = \beta_k \omega_k;$$

— избыточный (динамический) момент:

$$M_k = M_{\text{и}} = M_{\text{дин}} = J_k (\varphi) \frac{d\omega_k}{dt} + \frac{\omega_k^2}{2} \frac{dJ_k(\varphi)}{d\varphi}.$$

При неизменном моменте инерции ( $J = \text{const}$ )

$$M_{\text{и}} = J_k \frac{d\omega_k}{dt} = J_k p \omega_k.$$

Запишем уравнение движения для  $k$ -й вращающейся массы:

$$M_{\text{дв}} - M_{\text{с}} = M_{\text{и}}.$$

Здесь  $M_{\text{дв}} = M_{\varphi k-1k} + M_{\text{тp}k-1k}$ ,  $M_{\text{с}} = M_{\varphi k, k+1} + M_{\text{тp}k, k+1} + M_{\text{тp}k}$ ,  
откуда

$$M_{\varphi k-1k} + M_{\text{тp}k-1k} - M_{\varphi k, k+1} - M_{\text{тp}k, k+1} = J_k p \omega_k + M_{\text{тp}k};$$

$$\left( \frac{c_{k-1k}}{p} + \beta_{k-1k} \right) (\omega_{k-1} - \omega_k) - \left( \frac{c_{k, k+1}}{p} + \beta_{k, k+1} \right) (\omega_k - \omega_{k+1}) = (J_k p + \beta_k) \omega_k.$$

На основании [20, 21] введем в рассмотрение механическое сопротивление  $k$ -й вращающейся массы:  $\tilde{Z}_k(p) = J_k p + \beta_k$ , и механические сопротивления упругих связей, связанных с этой массой:

$$\tilde{Z}_{k, k+1}(p) = \frac{c_{k, k+1}}{p} + \beta_{k, k+1} \text{ и } \tilde{Z}_{k-1, k}(p) = \frac{c_{k-1, k}}{p} + \beta_{k-1, k}.$$

Изменяя  $k$  от 1 до  $n$ , получим общую систему уравнений в терминах механических сопротивлений:

$$\begin{cases} M - \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) = \tilde{Z}_1 \omega_1; \\ \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) - \tilde{Z}_{23}(\omega_2 - \omega_3) = \tilde{Z}_2 \omega_2; \\ \dots \\ \tilde{Z}_{k-1, k}(\omega_{k-1} - \omega_k) - \tilde{Z}_{k, k+1}(\omega_k - \omega_{k+1}) = \tilde{Z}_k \omega_k; \\ \dots \\ \tilde{Z}_{n-1, n}(\omega_{n-1} - \omega_n) - M_{\text{с}} = \tilde{Z}_n \omega_n. \end{cases} \quad (1)$$

Учитывая, что

$$\tilde{Z}_{k-1, k}(\omega_{k-1} - \omega_k) = M_{k-1, k} = M_{\varphi k-1k} + M_{\text{тp}k-1k}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где  $M_{1,2}, M_{2,3}, \dots, M_{k-1,k}, \dots, M_{n-1,n}$  — моменты в упругих связях, учитывающие трение (демпфирование).

Систему уравнений (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} M - M_{12} = \tilde{Z}_1 \omega_1; \\ M_{12} - M_{23} = \tilde{Z}_2 \omega_2; \\ \dots \\ M_{k-1, k} - M_{k, k+1} = \tilde{Z}_k \omega_k; \\ \dots \\ M_{n-1, n} - M_{\text{с}} = \tilde{Z}_n \omega_n. \end{cases} \quad (2)$$

На основании формул (1), (2) и понятия механической проводимости [20] составим структурную схему МС (рис. 2).

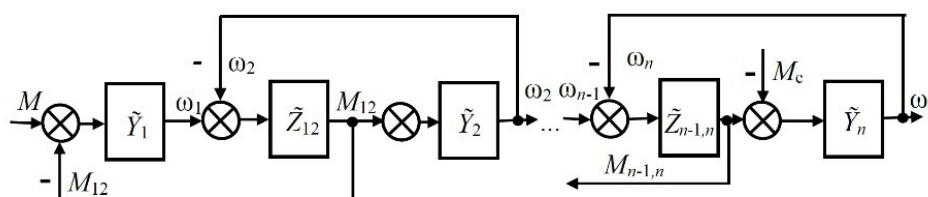


Рис. 2. Структурная схема  $n$ -массовой механической системы

Анализ рис. 2 показывает, что МС содержит внутренние перекрестные обратные связи по скорости и упругому моменту и является в структурном отношении сложной системой. Используя понятия механического сопротивления и механической проводимости, расчетную схему МС можно в общем случае представить в виде лестничной или цепной механической схемы (рис. 3).

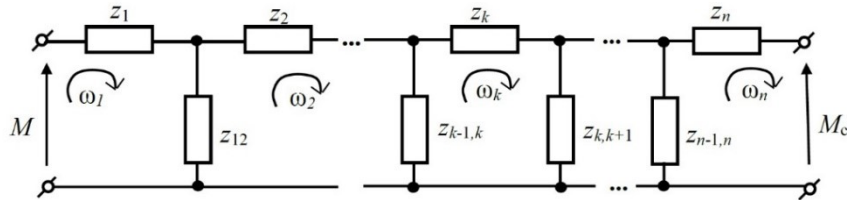


Рис. 3. Цепная механическая схема  $n$ -массовой механической системы

В этой схеме входные воздействия  $M$  и  $M_c$  (в общем случае  $M(P)$  и  $M_c(P)$ ) являются источниками моментов, а элементы — операторными механическими сопротивлениями. При моделировании на компьютере запись исходных уравнений должна быть строго формализована. Рассмотрим возможные формы записи уравнений МС. Для этой цели воспользуемся аналогией с электрическими цепями и известными из этой теории методами. При этом роль токов в МС будут играть угловые скорости, а роль напряжений моменты.

### Результаты (Results)

Известные методы анализа электрических цепей позволяют применить их также для математического описания МС. При этом наиболее практически привлекательным в зависимости от вида цепной схемы МС и поставленной задачи является использование методов контурного тока, узловых потенциалов и эквивалентного генератора.

**Контурные уравнения.** Перепишем уравнения (1), приводя все слагаемые к одноименным угловым скоростям. В результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12})\omega_1 - \tilde{Z}_{12}\omega_2 = M; \\ -\tilde{Z}_{12}\omega_1 + (\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23})\omega_2 - \tilde{Z}_{23}\omega_3 = 0; \\ \dots \\ -\tilde{Z}_{k-1,k}\omega_{k-1} + (\tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1})\omega_k - \tilde{Z}_{k,k+1}\omega_{k+1} = 0; \\ \dots \\ -\tilde{Z}_{n-1,n}\omega_{n-1} + (\tilde{Z}_{n-1,n} + \tilde{Z}_n)\omega_n = -M_c. \end{array} \right. \quad (3)$$

Запишем эти уравнения в матричной форме, удобной для вычисления на компьютере. В результате получим:

$$\begin{bmatrix} (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12}) & -\tilde{Z}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{Z}_{12} & (\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23}) & -\tilde{Z}_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{Z}_{n-1,n} & (\tilde{Z}_{n-1,n} + \tilde{Z}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ \vdots \\ -M_c \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В краткой форме записи система примет вид

$$\tilde{Z}\omega = M.$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{Z}}$  — матрица коэффициентов (механических сопротивлений);  $\boldsymbol{\omega}$  — матрица-столбец неизвестных угловых скоростей;  $\mathbf{M}$  — матрица-столбец внешних воздействий, т. е. моментов, приложенных к механической системе.

Записанные уравнения будем называть *контурными уравнениями судовых МС*. Этими уравнениями удобно пользоваться, когда неизвестными являются угловые скорости вращающихся масс. При этом решение записывается в следующем виде:

$$\boldsymbol{\omega} = \tilde{\mathbf{Z}}^{-1} \mathbf{M}, \quad (5)$$

где  $\tilde{\mathbf{Z}}^{-1}$  — матрица, обратная матрице механических сопротивлений.

Угловые скорости  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots, \omega_n$  можно условно считать контурными скоростями. В механической системе угловая скорость упругого элемента (угловая скорость ветвей с упругими проводимостями) определяется как разность двух контурных угловых скоростей.

Матрица контурных сопротивлений  $\tilde{\mathbf{Z}}$  — это квадратная трехдиагональная матрица размером  $n \times n$ . По главной диагонали расположены собственные контурные механические сопротивления, равные сумме всех комплексных механических сопротивлений ветвей, которые образуют контур, т. е. сумму механического сопротивления инерционной массы и двух упругих элементов, примыкающих к ней. Например, для  $k$ -й массы получим сумму, расположенную в  $k$ -й строке:  $\tilde{Z}^{(k)} = \tilde{Z}_{k-1,k} + \tilde{Z}_k + \tilde{Z}_{k,k+1}$ . По косым рядам, примыкающим к главной диагонали, находятся взаимные комплексные механические сопротивления контуров, взятые с обратным знаком, т. е. механические сопротивления упругих элементов, входящие в два смежных контура. Матрица контурных сопротивлений  $\tilde{\mathbf{Z}}$  симметрична, она не изменяется при замене строк столбцами. Таким образом, уравнения (3)–(5) аналогичны по форме уравнениям, которые составляют для расчета электрических цепей методом контурных токов.

Рассмотрим трехмассовую МС, расчетная цепная схема которой приведена на рис. 4. Для простоты будем пренебрегать потерями энергии и считать систему консервативной.

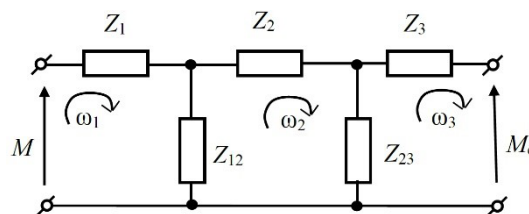


Рис. 4. Расчетная цепная схема механической системы для составления контурных уравнений

Для рассматриваемого случая:  $\tilde{Z}_1 = J_1 P$ ;  $\tilde{Z}_2 = J_2 P$ ;  $\tilde{Z}_3 = J_3 P$ ;  $\tilde{Z}_{12} = c_{12} / p$ ;  $\tilde{Z}_{23} = c_{23} / p$ .

По аналогии с методом контурных токов или на основании системы уравнений (3) можно записать:

$$\begin{cases} (\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12})\omega_1 - \tilde{Z}_{12}\omega_2 = M; \\ -\tilde{Z}_{12}\omega_1 + (\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23})\omega_2 - \tilde{Z}_{23}\omega_3 = 0; \\ -\tilde{Z}_{23}\omega_2 + (\tilde{Z}_{23} + \tilde{Z}_3)\omega_3 = -M_c. \end{cases} \quad (6)$$

Матричное уравнение примет вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12} & -\tilde{Z}_{12} & 0 \\ -\tilde{Z}_{12} & \tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23} & -\tilde{Z}_{23} \\ 0 & -\tilde{Z}_{23} & \tilde{Z}_{23} + \tilde{Z}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ -M_c \end{bmatrix}. \quad (7)$$



Для краткости записи можно использовать понятия собственных механических сопротивлений контуров. При этом

$$\tilde{Z}^{(1)} = \tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12}; \quad \tilde{Z}^{(2)} = \tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23}; \quad \tilde{Z}^{(3)} = \tilde{Z}_{23} + \tilde{Z}_3.$$

Если число вращающихся масс невелико, то возможно аналитическое решение уравнения в виде передаточной функции или частотной характеристики. В противном случае решить это уравнение можно только численными методами на компьютере. Например, при использовании частотного метода все механические сопротивления заменой  $p = j\omega$  следует перевести в частотную область и решать уравнения при конкретном значении частоты  $\omega$ .

Иногда представляют интерес не угловые скорости, а угловые перемещения соответствующих вращающихся масс. Так как  $\omega = d\varphi/dt = p\varphi$ , где  $\varphi$  — угол поворота, уравнение можно записать в виде

$$p\tilde{Z} = \mathbf{M}.$$

В это уравнение входит производная от операторного механического сопротивления. При этом оператор дифференцирования действует на каждый элемент матрицы  $\tilde{Z}$ .

Раскроем значение сопротивлений, перейдя к физическим параметрам системы:

$$\begin{aligned} p(\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_{12}) &= J_1 p^2 + c_{12}; \quad p\tilde{Z}_{12} = c_{12}; \quad p(\tilde{Z}_{12} + \tilde{Z}_2 + \tilde{Z}_{23}) = c_{12} + J_2 p^2 + c_{23}; \\ p\tilde{Z}_{23} &= c_{23}; \quad p(\tilde{Z}_3 + \tilde{Z}_{23}) = J_3 p^2 + c_{23}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{bmatrix} J_1 p^2 + c_{12} & -c_{12} & & \\ -c_{12} & c_{12} + J_2 p^2 + c_{23} & -c_{23} & \\ & -c_{23} & c_{23} + J_3 p^2 & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \\ -M_c \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Если известны угловые скорости или угловые перемещения, то можно найти упругие моменты.

$$\begin{cases} M_{12} = \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2); \\ M_{23} = \tilde{Z}_{23}(\omega_1 - \omega_2); \\ \dots \\ M_{n-1, n} = \tilde{Z}_{n-1, n}(\omega_{n-1} - \omega_n). \end{cases} \quad (9)$$

В матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ \vdots \\ M_{n-1, n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_{12} & -\tilde{Z}_{12} & & \\ & \tilde{Z}_{23} & -\tilde{Z}_{23} & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{Z}_{n-1, n} & -\tilde{Z}_{n-1, n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Контурные уравнения МС следует использовать в том случае, когда неизвестными являются угловые скорости или угловые перемещения вращающихся масс.

Можно составить систему уравнений таким образом, чтобы сразу определить упругие моменты. Такие уравнения называют узловыми уравнениями.

*Узловые уравнения.* Моменты в упругой связи определяются выражениями вида

$$M_{12} = \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2), \dots, M_{k-1, k} = \tilde{Z}_{k-1, k}(\omega_{k-1} - \omega_k), \dots, M_{n-1, n} = \tilde{Z}_{n-1, n}(\omega_{n-1} - \omega_n).$$

Можно записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1 - \omega_2 = \tilde{Y}_{12} M_{12}; \\ \omega_2 - \omega_3 = \tilde{Y}_{23} M_{23}; \\ \dots \\ (\omega_{k-1} - \omega_k) = \tilde{Y}_{k-1, k} M_{k-1, k}; \\ \dots \\ \omega_{n-1} - \omega_n = \tilde{Y}_{n-1, n} M_{n-1, n}. \end{cases} \quad (11)$$

Выражая угловые скорости вращающихся масс из системы уравнений (11), получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1 = \tilde{Y}_1 M - \tilde{Y}_1 M_{12}; \\ \omega_2 = \tilde{Y}_2 M_{12} - \tilde{Y}_2 M_{23}; \\ \dots \\ \omega_{k-1} = \tilde{Y}_{k-1} M_{k-2, k-1} - \tilde{Y}_{k-1} M_{k-1, k}; \\ \omega_k = \tilde{Y}_k M_{k-1, k} - \tilde{Y}_k M_{k, k+1}; \\ \dots \\ \omega_n = \tilde{Y}_n M_{n-1, n} - \tilde{Y}_n M_c. \end{cases} \quad (12)$$

Подставим полученные значения угловых скоростей в исходную систему уравнений. После приведения подобных членов получим:

$$\begin{cases} (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_{12} + \tilde{Y}_2) M_{12} - \tilde{Y}_2 M_{23} = \tilde{Y}_1 M; \\ -\tilde{Y}_2 M_{12} + (\tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_{23} + \tilde{Y}_3) M_{23} - \tilde{Y}_3 M_{34} = 0; \\ \dots \\ -\tilde{Y}_{k-1} M_{k-2, k-1} + (\tilde{Y}_{k-1} + \tilde{Y}_{k-1, k} + \tilde{Y}_k) M_{k-1, k} - \tilde{Y}_k M_{k, k+1} = 0; \\ \dots \\ \tilde{Y}_{n-1} M_{n-2, n-1} + (\tilde{Y}_{n-1} + \tilde{Y}_{n-1, n} + \tilde{Y}_n) M_{n-1, n} = -\tilde{Y}_n M_c. \end{cases} \quad (13)$$

Система уравнений (13) имеет полную аналогию с системой уравнений, которую составляют для расчета электрических цепей методом узловых потенциалов.

Запишем систему уравнений в матричной форме, удобной для расчетов на компьютере. Для краткости записи по аналогии с методом узловых потенциалов воспользуемся понятием узловых механических проводимостей, равных сумме проводимостей ветвей, сходящихся в узле:

$$\tilde{Y}^{(1)} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_{12} + \tilde{Y}_2, \quad \tilde{Y}^{(2)} = \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_{23} + \tilde{Y}_3, \quad \dots, \quad \tilde{Y}^{(n)} = \tilde{Y}_{n-1} + \tilde{Y}_{n-1, n} + \tilde{Y}_n;$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}^{(1)} & -\tilde{Y}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{Y}_2 & \tilde{Y}^{(2)} & -\tilde{Y}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{Y}_{n-1} & \tilde{Y}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \\ \dots \\ M_{n-1, n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 M \\ 0 \\ \dots \\ -\tilde{Y}_n M_c \end{bmatrix}. \quad (14)$$

В краткой форме записи система уравнений (14) примет вид

$$\tilde{\mathbf{Y}} \mathbf{M}_y = \boldsymbol{\mu}.$$

Здесь  $\tilde{\mathbf{Y}}$  — матрица коэффициентов (механических проводимостей);  $\mathbf{M}_y$  — матрица-столбец неизвестных моментов в упругих связях, включая упругие моменты и моменты сил трения;  $\boldsymbol{\mu}$  — матрица-столбец, определяемая внешними воздействиями, т. е. моментами, приложенными к МС.



Полученные уравнения будем называть *узловыми уравнениями* МС. Ими удобно пользоваться, когда неизвестными являются моменты в упругих связях. Решение записывается в следующем виде:

$$\mathbf{M}_y = \tilde{\mathbf{Y}}^{-1} \mu,$$

где  $\tilde{\mathbf{Y}}^{-1}$  — матрица обратная матрице узловых проводимостей.

Система узловых уравнений содержит не  $n$  уравнений, как система контурных уравнений, а  $(n-1)$  уравнение. При малом числе вращающихся масс это имеет большое значение, поскольку позволяет аналитическое решение. В отличие от матрицы  $\tilde{\mathbf{Z}}$  элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{Y}}$  не изменяются при любом числе вращающихся масс, меняется только их количество. Матрица механических проводимостей  $\tilde{\mathbf{Y}}$  имеет такой же вид, как и матрица механических сопротивлений. Отличие заключается только в первой и последней строке.

Уравнения (13) составляются аналогично составлению уравнений для расчета электрических цепей методом узловых потенциалов.

Для рассматриваемого случая запишем выражения для механических проводимостей:

$$\tilde{Y}_1 = \frac{1}{\tilde{Z}_1} = \frac{1}{J_1 p} = (J_1 p)^{-1}; \quad \tilde{Y}_2 = (J_2 p)^{-1}; \quad \tilde{Y}_3 = (J_3 p)^{-1}.$$

Расчетная цепная схема будет иметь вид, аналогичный рис. 4.

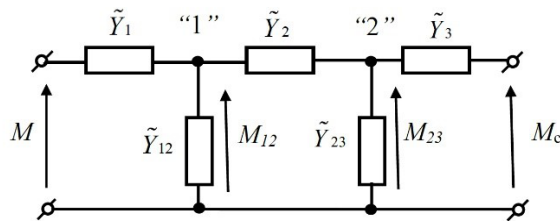


Рис. 5. Расчетная цепная схема механической системы для составления узловых уравнений

По аналогии с методом узловых потенциалов и системой уравнений (13) можно записать:

$$\begin{cases} \tilde{Y}^{(1)} M_{12} - \tilde{Y}_2 M_{23} = \tilde{Y}_1 M; \\ -\tilde{Y}_2 M_{12} + \tilde{Y}^{(2)} M_{23} = -\tilde{Y}_3 M_c. \end{cases} \quad (15)$$

Матричное уравнение примет вид:

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y}^{(1)} & -\tilde{Y}_2 \\ -\tilde{Y}_2 & \tilde{Y}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 M \\ -\tilde{Y}_3 M_c \end{bmatrix}, \quad (16)$$

где  $\tilde{Y}^{(1)} = \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_{12} + \tilde{Y}_2$ ;  $\tilde{Y}^{(2)} = \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_{23} + \tilde{Y}_3$ .

Квадратная матрица второго порядка легко обращается. Запишем решение полученной системы уравнений:

$$\begin{bmatrix} M_{12} \\ M_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} \tilde{Y}^{(2)} & \tilde{Y}_2 \\ \tilde{Y}_2 & \tilde{Y}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1 M \\ -\tilde{Y}_3 M_c \end{bmatrix}; \quad D = \tilde{Y}^{(1)} \tilde{Y}^{(2)} - \tilde{Y}_2^2, \quad (17)$$

где  $D = \tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_2 \tilde{Y}_3 + \tilde{Y}_3 \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_{12} (\tilde{Y}_2 + \tilde{Y}_3) + \tilde{Y}_{23} (\tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2) + \tilde{Y}_{12} \tilde{Y}_2$ .

В развернутом виде:

$$M_{12} = \frac{\tilde{Y}^{(2)} \tilde{Y}_1}{D} M - \frac{\tilde{Y}_2 \tilde{Y}_3}{D} M_c; \quad M_{23} = \frac{\tilde{Y}_1 \tilde{Y}_2}{D} M - \frac{\tilde{Y}^{(1)} \tilde{Y}_3}{D} M_c. \quad (18)$$

Если известны упругие моменты, то по полученным уравнениям можно найти угловые скорости вращающихся масс. Например, для первой вращающейся массы получим

$$\omega_1 = \tilde{Y}_1 M - \tilde{Y}_1 M_{12} = \tilde{Y}_1 \left[ M \left( 1 - \frac{\tilde{Y}^{(2)} \tilde{Y}_1}{D} \right) + \frac{\tilde{Y}_2 \tilde{Y}_3}{D} M_c \right]. \quad (19)$$

Узловые уравнения следует использовать для математического описания МС, когда известны узловые проводимости, а число узлов расчетной схемы меньше числа ее независимых контуров.

*Расчет угловых скоростей и моментов методом эквивалентного генератора.* Аналогия с электрическими цепями позволяет использовать для математического описания цепных МС все известные методы теоретической электротехники. В том случае, если требуется определить угловую скорость лишь одной вращающейся массы или момент лишь в одной упругой механической связи целесообразно воспользоваться методом эквивалентного генератора.

По отношению к рассчитываемой ветви механической цепной схемы внешний двухполюсник при расчете может быть заменен эквивалентным генератором, с моментом (для электрических цепей с напряжением холостого хода) на зажимах этой ветви, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника. Мысленно заключим всю схему, кроме рассчитываемой ветви, в прямоугольник. Эта часть схемы и будет эквивалентным генератором. При расчете исследуемая ветвь с механическим сопротивлением удаляется из схемы. Узлы, к которым она присоединялась, обозначают буквами или цифрами, например, «1» и «2», как показано на рис. 5. Оставшаяся часть схемы и будет представлять собой эквивалентный генератор с эквивалентным моментом (ЭДС — для электрических цепей) и сопротивлением. Чтобы определить искомую угловую скорость (ток для электрических цепей) нужно рассчитать эти два параметра. При расчете эквивалентного сопротивления источники моментов принимаются равными нулю («закорачиваются»).

Рассмотрим расчетную цепную схему, представленную на рис. 4. Пусть требуется определить угловую скорость  $\omega_2(p)$ . Для решения этой задачи удалим из схемы сопротивление  $\tilde{Z}_2$  (см. рис. 4) или, что то же, проводимость  $\tilde{Y}_2$  (см. рис. 5) между узлами «1» и «2». Эквивалентное сопротивление (сопротивление генератора) определится выражением

$$Z_3 = \frac{Z_1 Z_{12}}{Z_1 + Z_{12}} + \frac{Z_3 Z_{23}}{Z_3 + Z_{23}}. \quad (20)$$

Эквивалентный момент генератора

$$M_3 = M_1 + M_2 = \frac{Z_{12} M}{Z_1 + Z_{12}} - \frac{Z_{23} M_c}{Z_3 + Z_{23}}. \quad (21)$$

Окончательно получим

$$\omega_2(p) = \frac{M_3(p)}{Z_3(p) + Z_2(p)}. \quad (22)$$

В этой формуле все переменные и параметры являются операторными величинами.

Рассмотрим двухмассовую МС, которая находит самое широкое применение при исследовании динамических свойств судовых МС. Используя понятия механических сопротивлений, система уравнений в данном случае записывается в виде [18]:

$$\begin{cases} M - \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) = \tilde{Z}_1 \omega_1; \\ \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2) - M_c = \tilde{Z}_2 \omega_2, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\tilde{Z}_1 = J_1 p + \beta_1$ ;  $\tilde{Z}_2 = J_2 p + \beta_2$ ;  $\tilde{Z}_{12} = \frac{c_{12}}{p} + \beta_{12}$ ;  $M_{12} = \tilde{Z}_{12}(\omega_1 - \omega_2)$ .

Системе уравнений (23) соответствуют цепная механическая схема, приведенная на рис. 6.

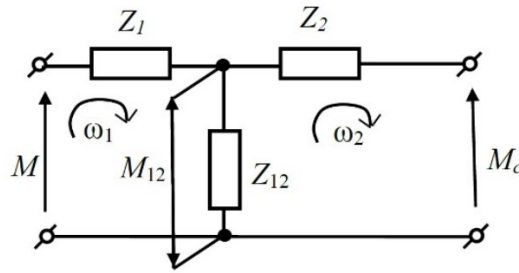


Рис. 6. Расчетная цепная схема механической системы

Если требуется определить только момент в упругой связи, то также можно воспользоваться идеей метода эквивалентного генератора. Для этого определим гипотетическую угловую скорость  $\omega_{12}$  и умножив ее на сопротивление  $\tilde{Z}_{12}$ , получим искомое выражение для момента:

$$M_{12} = \omega_{12} Z_{12}; \quad \omega_{12} = \frac{M_3}{Z_3 + Z_{12}}; \quad Z_3 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}; \quad M_3 = M - \frac{Z_1 (M - M_c)}{Z_1 + Z_3}.$$

Запишем уравнения двухмассовой МС относительно физических параметров системы, для простоты, считая, что диссипация энергии в МС отсутствует ( $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_{12} = 0$ ) и разрешая уравнения относительно угловых скоростей, получим:

$$\begin{cases} \omega_1(p) = \frac{J_2 p^2 + c_{12}}{J_1 J_2 p^3 + c_{12} J_{\Sigma} p} M(p) - \frac{c_{12}}{J_1 J_2 p^3 + c_{12} J_{\Sigma} p} M_c(p); \\ \omega_2(p) = \frac{c_{12}}{J_1 J_2 p^3 + c_{12} J_{\Sigma} p} M(p) - \frac{J_1 p^2 + c_{12}}{J_1 J_2 p^3 + c_{12} J_{\Sigma} p} M_c(p). \end{cases} \quad (24)$$

Введя обозначения:  $\omega_0 = \sqrt{c_{12}(J_1 + J_2)/J_1 J_2}$  — резонансная частота колебаний;  $\omega_{01} = \sqrt{c_{12}/J_1}$  — резонансная частота колебаний первой массы при жесткой заделке второй массы, т. е. при  $J_2 \rightarrow \infty$ ;  $\omega_{02} = \sqrt{c_{12}/J_2}$  — резонансная частота колебаний второй массы при жесткой заделке первой массы, т. е. при  $J_1 \rightarrow \infty$ , и подставляя их в систему уравнений (24), получим:

$$\begin{cases} \omega_1(p) = \frac{1}{J_1 p} \frac{p^2 + \omega_{02}^2}{p^2 + \omega_0^2} M(p) - \frac{1}{J_1 p} \frac{\omega_{02}^2}{p^2 + \omega_0^2} M_c(p); \\ \omega_2(p) = \frac{1}{J_2 p} \frac{\omega_{01}^2}{p^2 + \omega_0^2} M(p) - \frac{1}{J_2 p} \frac{p^2 + \omega_{01}^2}{p^2 + \omega_0^2} M_c(p). \end{cases} \quad (25)$$

Данная система уравнений удобна для анализа МС методами теории автоматического управления, в частности частотным методом. Выполним анализ МС на примере двухмассовой МС. Суть его заключается в переходе путем замены  $p = j\omega$  в частотную область и построении частотных характеристик исследуемой передаточной характеристики МС.

Выполнив в системе уравнений (25) замену  $p = j\omega$ , получим:

$$\begin{aligned} \omega_1(j\omega) &= \frac{1}{J_1 j\omega} \frac{\omega_{02}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} M(j\omega) - \frac{1}{J_1 j\omega} \frac{\omega_{02}^2}{\omega_0^2 - \omega^2} M_c(j\omega); \\ \omega_2(j\omega) &= \frac{1}{J_2 j\omega} \frac{\omega_{01}^2}{\omega_0^2 - \omega^2} M(j\omega) - \frac{1}{J_2 j\omega} \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} M_c(j\omega). \end{aligned} \quad (26)$$

Рассмотрим в качестве примера частотные характеристики второй массы. Отношение гармонических колебаний скорости второй массы к гармоническим изменениям момента сил сопротивления называют собственной проводимостью или амплитудно-частотной характеристикой по моменту сопротивления:

$$A_{22}(\omega) = |\tilde{Y}_{22}(j\omega)| = \frac{|\omega_2(j\omega)|}{|M_c(j\omega)|} = \frac{1}{J_2\omega} \frac{\omega_{01}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

График этой функции представлен на рис. 7, а. При этом частоту  $\omega$  меняем от 0 до  $\infty$ . Частотная характеристика имеет нуль при  $\omega = \omega_{01}$ . При этой частоте комплексная механическая проводимость МС равна нулю. Этот случай можно рассматривать как точку резонанса скорости. Это суждение вытекает из аналогии с электрическими цепями, в которых резонанс тока наступает при нулевой проводимости цепи.

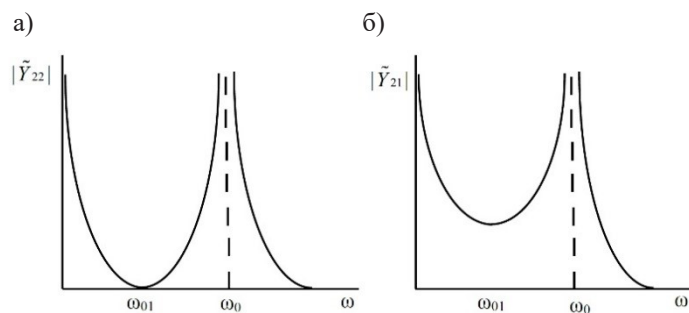


Рис. 7. Частотные характеристики второй массы двухмассовой системы: а — без учета демпфирования колебаний; б — с учетом демпфирования

Резонанс скорости возникает из-за влияния массы  $J_1$  на скорость массы  $J_2$ . При частоте  $\omega = \omega_0$  частотная характеристика имеет полюс. Комплексная механическая проводимость равна бесконечности, а сопротивление — нулю. Эта точка соответствует резонанса момента или силы. Резонанс момента определяется совместным влиянием динамических параметров всей МС.

Рассмотрим взаимную проводимость или амплитудно-частотную характеристику второй массы по управляющему моменту

$$A_{21}(\omega) = |\tilde{Y}_{21}(j\omega)| = \frac{|\omega_2(j\omega)|}{|M(j\omega)|} = \frac{1}{J_2\omega} \frac{\omega_{01}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (27)$$

Эта функция не имеет нулей, единственный полюс соответствует резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  (рис. 7, б).

Частотные характеристики первой массы аналогичны. В этом случае только моменты  $M$  и  $M_c$  меняются местами. При наличии трения, которое в малой степени демпфирует механическую характеристику, частотные характеристики сохраняют свой вид, однако в точках резонанса механическая проводимость принимает значения, отличные от нуля и бесконечности.

Анализ динамических свойств МС в этом случае следует вести по уточненным формулам, которые получаются из системы уравнений (23) путем подстановки вместо механического сопротивления  $\tilde{Z}_1$ ,  $\tilde{Z}_2$  и  $\tilde{Z}_{12}$  их значений с учетом коэффициента демпфирования. Например, для рассматриваемых передаточных функций, АЧХ примут вид:

$$\begin{aligned} A_{22}(\omega) = |\tilde{Y}_{22}(j\omega)| &= \frac{|(c_{12} - J_1\omega^2) + j\omega(\beta_1 + \beta_2)|}{|c_{12}(\beta_1 + \beta_2) - \omega^2(J_1\beta_2 + J_2\beta_1 - J_{\Sigma}\beta_{12}) - j\omega^3 J_1 J_2|} = \\ &= \frac{\sqrt{(c_{12} - J_1\omega^2)^2 + \omega^2(\beta_1 + \beta_{12})^2}}{\sqrt{c_{12}(\beta_1 + \beta_2) - \omega^2(J_1\beta_2 + J_2\beta_1 - J_{\Sigma}\beta_{12})^2 + \omega^6 J_1^2 J_2^2}}; \end{aligned} \quad (28)$$

$$A_{21}(\omega) = |\tilde{Y}_{21}(j\omega)| = \frac{|(c_{12} - J_1\omega^2) + j\omega(\beta_2 + \beta_{12})|}{|c_{12}(\beta_1 + \beta_2) - \omega^2(J_1\beta_2 + J_2\beta_1 - J_\Sigma\beta_{12}) - j\omega^3 J_1 J_2|} =$$

$$= \frac{\sqrt{(c_{12} - J_2\omega^2)^2 + \omega^2(\beta_1 + \beta_{12})^2}}{\sqrt{c_{12}^2(\beta_1 + \beta_2)^2 - \omega^2(J_1\beta_2 + J_2\beta_1 - J_\Sigma\beta_{12})^2 + \omega^6 J_1^2 J_2^2}}. \quad (29)$$

В формулах (28)–(29) не учитываются произведения коэффициентов демпфирования  $\beta_1\beta_{12}$  и  $\beta_2\beta_{12}$  как величины бесконечно малые по отношению к другим слагаемым.

Более подробно анализ двухмассовой МС для электропривода без учета демпфирования рассмотрен в учебнике (Ключев В. И. Теория электропривода: учебник для вузов. М: Энергоатомиздат, 2001. 696 с.).

### Заключение (Conclusion)

Проведенное исследование показывает, что механические системы судовых энергетических установок и электроприводов в своем большинстве являются сложными многомассовыми системами с упругими связями. Для решения разнообразных задач анализа и синтеза этих систем, включая задачи оценки надежности и технической эксплуатации необходимы математические модели, которые в полной мере должны учитывать свойства этих систем. Анализ показал, что для получения таких моделей могут быть применены известные методы анализа электрических цепей. Для использования этих методов МС следует представить в виде механических цепных схем, в которых роль токов играют угловые скорости вращающихся масс, а роль напряжений — упругие моменты. При этом пассивными параметрами схем являются операторные механические сопротивления и проводимости. Получены и рассмотрены на примерах контурные и узловые уравнения МС, а также рассмотрен метод эквивалентного генератора, позволяющий определять угловую скорость одной, конкретной вращающейся массы или момент в упругой связи. Метод эквивалентного генератора рассмотрен на примерах трехмассовой и двухмассовой МС. Для двухмассовой МС получены возможные формы представления математических моделей и выполнен ее анализ частотным методом при наличии и отсутствии демпфирования упругих колебаний в системе.

Рассмотренный в данной статье метод электрической аналогии может быть использован для описания разветвленных механических систем [19]. Работы в этом направлении являются предметом дальнейших исследований сложных судовых механических систем.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сафронов А. А. Математическая модель турбоагрегата с учетом крутильных колебаний валапровода / А. А. Сафронов, В. Д. Рождественский, Ю. Д. Дудник // Известия СПбГЭТУ ЛЭТИ. — 2025. — Т. 18. — № 5. — С. 108–115. DOI: 10.32603/2071-8985-2025-18-5-108-115. — EDN CBKUOD.
2. Нейман Л. А. Влияние сил трения на динамику работы двухмассовой модели электромагнитного вибратора / Л. А. Нейман, В. Ю. Нейман // Электротехника. — 2023. — № 5. — С. 18–22. DOI: 10.53891/00135860\_2023\_5\_18. — EDN HINFTA.
3. Царенко С. Н. Динамика валопровода гребного винта при разгонных режимах / С. Н. Царенко, А. Н. Рак, Б. Н. Безлобенко // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 4. — С. 548–558. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-548-558. — EDN JCZBGG.
4. Султанов Т. Т. Анализ динамического напряженно-деформированного состояния судовых механизмов с упругими анизотропными звеньями / Т. Т. Султанов, З. Р. Бурнаев, Г. М. Тлепиева // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 369–380. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-369-380. — EDN CRYIJT.
5. Karnovsky I. A. Theory of Vibration Protection / I. A. Karnovsky, E. Lebed — Springer, 2016. — 708 p.

6. *Елисеев С. В.* Прикладная теория колебаний в задачах динамики линейных механических систем / С. В. Елисеев, А. И. Артюнин. — Новосибирск: Новосибирское отделение издательства «Наука», 2016. — 459 с. — EDN WEHNET.

7. *Пятибратов Г. Я.* Параметрические способы демпфирования электроприводом упругих колебаний механизмов / Г. Я. Пятибратов // Известия высших учебных заведений. Электромеханика. — 2013. — № 4. — С. 21–26. — EDN RACESN.

8. *Коперчак О. П.* Методы оптимизации работы элементов пропульсивного комплекса на морских транспортных судах / О. П. Коперчак // Эксплуатация морского транспорта. — 2023. — № 1(106). — С. 165–170. DOI: 10.34046/aumsuomt106/28. — EDN GELXVV.

9. *Мосейко Е. С.* Задачи оценки рисков и предупреждения отказов судовых механических систем / Е. С. Мосейко, Е. О. Ольховик // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 6. — С. 931–944. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-931-944. — EDN MBUNDL.

10. *Королев В. В.* Диагностика и контроль механических напряжений и вибраций в судовых электротехнических комплексах и системах / В. В. Королев // Эксплуатация морского транспорта. — 2010. — № 3(61). — С. 52–57. — EDN MVSZPN.

11. *Чура М. Н.* К оценке эксплуатационного ресурса судовых гребных валов / М. Н. Чура, А. В. Файвисович // Эксплуатация морского транспорта. — 2020. — № 3(96). — С. 123–127. DOI: 10.34046/aumsuomt96/17. — EDN LEYQYU.

12. *Елисеев С. В.* Динамическое гашение колебаний: концепция обратной связи и структурные методы математического моделирования / С. В. Елисеев, А. П. Хоменко. — Новосибирск: Новосибирское отделение издательства "Наука", 2014. — 357 с. — EDN TPMIUF.

13. *Ермаков А. В.* Описание упрощенного метода моделирования систем с упругими связями в среде Matlab, с использованием пакета расширения Simulink SimMechanics / А. В. Ермаков // Наука и бизнес: пути развития. — 2014. — № 8(38). — С. 107–111. — EDN THBPMR.

14. *Каргапольцев С. К.* Определение динамических взаимодействий в механической колебательной системе с дополнительными связями / С. К. Каргапольцев, Р. С. Большаков // Системы. Методы. Технологии. — 2024. — № 4(64). — С. 7–14. DOI: 10.18324/2077-5415-2024-4-7-14. — EDN AAEOXF.

15. *Белокобыльский С. В.* Импедансные подходы как одна из форм оценки динамических свойств механических колебательных систем в структурном математическом моделировании / С. В. Белокобыльский, С. В. Елисеев, В. Б. Кашуба // Системы. Методы. Технологии. — 2015. — № 4(28). — С. 7–15. — EDN VDFNNT.

16. *Кашуба В. Б.* Структурное математическое моделирование в задачах оценки динамических свойств механических колебательных систем / В. Б. Кашуба, Н. Ж. Кинаш, А. В. Елисеев, А. В. Николаев // Системы. Методы. Технологии. — 2016. — № 3(31). — С. 16–28. DOI: 10.18324/2077-5415-2016-3-16-28. — EDN XQSNVN.

17. *Жихарь А. И.* Вибрационная математическая модель судовых трубопроводов / А. И. Жихарь, В. Н. Лубенко // Вестник Астраханского государственного технического университета. — 2007. — № 2(37). — С. 103–106. — EDN KVVTRV.

18. *Андрианов Е. Н.* Моделирование механических систем морской перегрузочной техники методом электрической аналогии / Е. Н. Андрианов, А. В. Саушев, Д. И. Троян // Морской вестник. — 2015. — № 1(53). — С. 49–52. — EDN TJXPGH.

19. *Белокобыльский С. В.* К вопросу о математической модели цепной механической системы / С. В. Белокобыльский, А. В. Елисеев, И. С. Ситов, А. И. Артюнин // Системы. Методы. Технологии. — 2017. — № 1(33). — С. 7–18. DOI: 10.18324/2077-5415-2017-1-7-18. — EDN YHHYOX.

20. *Саушев А. В.* Математическое описание многомассовых механических систем электропривода / А. В. Саушев // Электричество. — 2013. — № 3. — С. 27–33. — EDN PVDOXX.

21. *Саушев А. В.* Моделирование многомассовых механических систем электроприводов методом электрической аналогии / А. В. Саушев, В. А. Шошмин // Журнал университета водных коммуникаций. — 2010. — № 4. — С. 57–64. — EDN NDCHBN.



## REFERENCES

1. Safronov, A. A., V. D. Rozhdestvenskiy and Yu. D. Dudnik. "Mathematical model of turbine unit considering shaft line torsional vibrations." *Leti Transactions on Electrical Engineering & Computer Science* 18.5 (2025): 108–115. DOI: 10.32603/2071-8985-2025-18-5-108-115.
2. Neyman, L. A. and V. Yu. Neyman. "Influence of friction forces on dynamics of the two-mass model of an electromagnetic vibrator." *Elektrotehnika* 5 (2023): 18–22. DOI: 10.53891/00135860\_2023\_5\_18.
3. Tsarenko, S. N., A. N. Rak and B. N. Bezlobenko. "Propeller shaft line dynamics at acceleration mode." *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova* 13.4 (2021): 548–558. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-4-548-558.
4. Sultanov, T. T., Z. R. Burnaev and G. M. Tlepieva. "analysis of the dynamic stress-strain state of ship mechanisms with elastic anisotropic links." *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova* 12.2 (2020): 369–380. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-369-380.
5. Karnovsky, I. A. and E. Lebed. *Theory of Vibration Protection* Springer, 2016: 708.
6. Eliseev, S. V. and A. I. Artyunin. *Prikladnaya teoriya kolebaniy v zadachakh dinamiki lineynykh mekhanicheskikh sistem* Novosibirsk: Novosibirskoe otdelenie izdatel'stva "Nauka", 2016: 459.
7. Pyatibratov, G. Ya. "Parametricheskie sposoby dempfirovaniya elektroprivodom uprugikh kolebaniy mekhanizmov." *Russian Electromechanics* 4 (2013): 21–26.
8. Koperchak, O. P. "Methods for optimizing the operation of propulsion system elements on sea-going transport ships." *Operation of marine transport* 1(106) (2023): 165–170. DOI: 10.34046/aumsuomt106/28.
9. Moseyko, E. S. and E. O. Ol'khovik. "Tasks of risks assessment and failures prevention of the ship's mechanical systems." *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova* 14.6 (2022): 931–944. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-931-944.
10. Korolev, V. V. "Diagnosis and control of mechanical stresses and vibrations in the ship's electrotechnical complexes and systems." *Operation of marine transport* 3(61) (2010): 52–57.
11. Chura, M. N. and A. V. Fayvisovich. "To assess the operational life of ship's propeller shafts." *Operation of Marine Transport* 3(96) (2020): 123–127. DOI: 10.34046/aumsuomt96/17.
12. Eliseev, S. V. and A. P. Khomenko. *Dinamicheskoe gashenie kolebaniy: kontseptsiya obratnoy svyazi i strukturnye metody matematicheskogo modelirovaniya* Novosibirsk: Novosibirskoe otdelenie izdatel'stva "Nauka", 2014: 357.
13. Ermakov, A. V. "Description of the simplified method of modeling systems with elastic links in Matlab with Simulink SimMechanics extension package." *Science and Business: Ways of Development* 8(38) (2014): 107–111.
14. Kargapol'tsev, S. K. and R. S. Bol'shakov. "Identification of dynamic interactions in a mechanical oscillatory system with additional connections." *Systems. Methods. Technologies.* 4(64) (2024): 7–14. DOI: 10.18324/2077-5415-2024-4-7-14.
15. Belokobyl'skiy, S. V., S. V. Eliseev and V. B. Kashuba. "Impedance approaches as an estimation form for dynamical properties of mechanical oscillation systems in structural mathematical modelling." *Systems. Methods. Technologies.* 4(28) (2015): 7–15.
16. Kashuba, V. B., N. Zh. Kinash, A. V. Eliseev and A. V. Nikolaev. "Structural mathematical modelling in problems of an estimation of dynamic properties of mechanical oscillatory systems." *Systems. Methods. Technologies.* 3(31) (2016): 16–28. DOI: 10.18324/2077-5415-2016-3-16-28.
17. Zhikhar', A. I. and V. N. Lubenko. "Vibrating mathematical model of ship pipelines." *Vestnik of Astrakhan State Technical University* 2(37) (2007): 103–106.
18. Andrianov, E. N., A. V. Saushev and D. I. Troyan. "Modelirovanie mekhanicheskikh sistem morskoy peregruzochnoy tekhniki metodom elektricheskoy analogii." *Morskoy vestnik* 1(53) (2015): 49–52.
19. Belokobyl'skiy, S. V., A. V. Eliseev, I. S. Sitov and A. I. Artyunin. "On the issue of mathematical model of chain mechanical system." *Systems. Methods. Technologies.* 1(33) (2017): 7–18. DOI: 10.18324/2077-5415-2017-1-7-18.
20. Saushev, A. V. "Matematicheskoe opisanie mnogomassovykh mekhanicheskikh sistem elektroprivoda." *Elektrichestvo* 3 (2013): 27–33.
21. S Saushev, A. V. and V. A. Shoshmin. "Modelirovanie mnogomassovykh mekhanicheskikh sistem elektroprivodov metodom elektricheskoy analogii." *Zhurnal universiteta vodnykh kommunikatsiy* 4 (2010): 57–64.

**ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ**

**Саушев Александр Васильевич —**

доктор технических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала  
С. О. Макарова»  
198035, Российская Федерация,  
Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7  
e-mail: [saushev@bk.ru](mailto:saushev@bk.ru), [SaushevAV@gumrf.ru](mailto:SaushevAV@gumrf.ru)

**Гаврилов Владимир Васильевич —**

доктор технических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала  
С. О. Макарова»  
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург,  
ул. Двинская, 5/7  
e-mail: [vgavrilov47@yandex.ru](mailto:vgavrilov47@yandex.ru), [kaf\\_sdvs@gumrf.ru](mailto:kaf_sdvs@gumrf.ru)

**Ерофеев Валентин Леонидович —**

доктор технических наук, профессор  
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала  
С. О. Макарова»  
198035, Российская Федерация,  
г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7  
e-mail: [kaf\\_sdvs@gumrf.ru](mailto:kaf_sdvs@gumrf.ru)

**INFORMATION ABOUT THE AUTHORS**

**Saushev, Alexander V. —**

Dr. of Technical Sciences, Professor  
Admiral Makarov State University of Maritime  
and Inland Shipping  
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg,  
198035, Russian Federation  
e-mail: [saushev@bk.ru](mailto:saushev@bk.ru), [SaushevAV@gumrf.ru](mailto:SaushevAV@gumrf.ru)

**Gavrilov, Vladimir V. —**

Grand PhD in Technical Sciences, Professor  
Admiral Makarov State University of Maritime  
and Inland Shipping  
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg,  
198035, Russian Federation  
e-mail: [vgavrilov47@yandex.ru](mailto:vgavrilov47@yandex.ru), [kaf\\_sdvs@gumrf.ru](mailto:kaf_sdvs@gumrf.ru)

**Erofeev, Valentin L. —**

Grand PhD in Technical Sciences, Professor  
Admiral Makarov State University of Maritime and  
Inland Shipping  
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg,  
198035, Russian Federation  
e-mail: [kaf\\_sdvs@gumrf.ru](mailto:kaf_sdvs@gumrf.ru)

*Статья поступила в редакцию: 01 октября 2025 г.*

*Received: Oct. 1, 2025.*