

RESEARCH OF THE DIFFERENTIAL PROPERTIES OF THE NAVIGATIONAL ISOSURFACE

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The topic of this paper is a qualitative study of navigational isosurfaces to establish the practicality of polynomial approximation for a class of differentiable functions with minimized “smoothness.” When solving problems of restoring the scalar field of navigation parameters, it is certainly important to form an initial correct judgment about the isogeometric proximity between the approximate and approximating functions, provided specific information is given about the differential properties of the synthesized navigation isosurface. It is assumed that the structure of the graphical model of the object under study and the characteristics of function approximation theory should be consistent with each other when forming a unified information approach. As a concrete illustrative example, a study of the differential properties of a formalized representation of an astronavigational isosurface — with geometric interpretation in the form of computer screenshots obtained as a result of the work of a compiled software module — has been performed. An assumption is made regarding the realistic possibility of choosing the optimal approximate navigation function based on visualization of the “smoothness” of a navigation function of any dimension in accordance with Schoenberg’s hypothesis about the relationship between minimum curvature and maximum smoothness of an algebraic line. The search for a solution to the problem of graphical transformation of break points of an abstract isoline, formalized in strict mathematical terms as a special case of a navigational isosurface, is determined. The developed methodology is proposed for effective verification of the reliability of big geospatial data. The prospective importance of proper mathematical processing of marine spatial data from geographic information systems is emphasized as a priority in providing consumers with reliable information for practical purposes. The relevance of the need to conduct a qualitative study of navigational isosurfaces to successfully approximate them from the unified standpoint of spline function theory coincides with the prediction of the emergence of complex hypothetical isolines, which are expected to be studied during the evolution of technical means of navigation.

Key words: qualitative research, differential properties of the isosurface, approximate navigation function, astronavigational isosurface, Schoenberg’s hypothesis, big geospatial data, geographic information system.

For citation:

Yuyukin, Igor V. “Research of the differential properties of the navigational isosurface.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 17.4 (2025): 515–533. DOI: 10.21821/2309-5180-2025-17-4-515-533.

УДК 656.61.052

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВ НАВИГАЦИОННОЙ ИЗОПОВЕРХНОСТИ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Темой работы является качественное исследование навигационных изоповерхностей с целью установления практической полиномиальной аппроксимация для класса дифференцируемых функций с минимизированной «гладкостью». При решении задач восстановления скалярного поля навигационных параметров представляется, безусловно, важным формирование изначального правильного суждения об изогометрической близости приближаемой и приближающих функций при условии предоставления конкретных сведений о дифференциальных свойствах синтезируемой навигационной изоповерхности. Предполагается, что структура графической модели объекта исследования и характеристики теории приближения функций должны быть согласованы между собой при формировании единого информационного подхода. В качестве конкретного показательного примера выполнено исследование дифференциальных свойств

формализованного представления астронавигационной изоповерхности с геометрической интерпретацией в виде компьютерных скриншотов как результат работы составленного программного модуля. Выдвигается предположение о реалистичной возможности выбора оптимальной аппроксимативной навигационной функции на основе визуализации «гладкости» навигационной функции любой размерности в соответствии с гипотезой Шёнберга о взаимосвязи минимума кривизны с максимумом плавности алгебраической линии. Определен поиск решения неформализуемой в строгом математическом соответствии задачи графической трансформации точек разрыва абстрактной изолинии как частного случая навигационной изоповерхности. Предлагается использование разработанной методики в качестве эффективной проверки достоверности больших геопространственных данных. Акцентируется перспективная важность надлежащей математической обработки морских пространственных данных географических информационных систем в качестве приоритета предоставления потребителям обоснованной информации для практических целей. Актуальность необходимости проведения качественного исследования навигационных изоповерхностей с целью их последующей успешной аппроксимации с единых позиций теории сплайн-функций согласуется с прогнозированием появления сложных гипотетических изолиний, которые в перспективе предполагается изучать в процессе эволюции технических средств судовождения.

Ключевые слова: качественное исследование, дифференциальные свойства изоповерхности, аппроксимативная навигационная функция, астронавигационная изоповерхность, гипотеза Шёнберга, большие геопространственные данные, географическая информационная система.

Для цитирования:

Ююкин И. В. Исследование дифференциальных свойств навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2025. — Т. 17. — № 4. — С. 515–533. DOI: 10.21821/2309-5180-2025-17-4-515-533. — EDN DUSTFN.

Введение (Introduction)

Для обеспечения успешности применения алгоритмов сплайн-аппроксимации с целью моделирования навигационных изоповерхностей необходимо предварительно провести качественное исследование на «гладкость» поверхностей равных значений поля навигационных параметров. Данный вариационный подход позволит синтезировать математически формализованную изоповерхность с определенными дифференциальными свойствами. Изоповерхность при данном подходе рассматривается как геометрическое представление скалярного поля результатов измерений навигационных параметров. Массиву дискретных измерений в пространстве соответствует определенная поверхность положения, интерпретируемая как изоповерхность. Практическая задача построения по дискретным данным кривых и поверхностей сложной формы с сохранением выделенных геометрических характеристик исходных измерительных данных понимается как проблема изогометрической аппроксимации¹. Комплексное синтезирование кривых и поверхностей по дискретным данным предполагает обоснованное применение сплайновых методов с сохранением геометрических свойств исходных данных [1]. Апробированность математических моделей позволяет выполнить достаточно полное решение задачи изогометрической аппроксимации для произвольных сеточных данных.

В рамках данного подхода навигационные изолинии рассматриваются как графические контурные линии уровня навигационной изоповерхности при реализации проекционных сечений. Геометрически навигационные изолинии представляют собой следы сечения профиля изоповерхности горизонтальными плоскостями, находящимися одна за другой на заданных расстояниях. Значение приобретают подходы исследования дифференциальных свойств изоповерхности по изолиниям с восстановлением методами сплайн-функций информации, заложенной в структуре изолиний в виде отдельных геометрических объектов. Таким образом, об изогометрических свойствах визуально гладкой поверхности можно судить по анализу качественных свойств геометрии серии компонентных результирующих кривых линий, конструктивно формирующих данную поверхность графически в дискретном контексте [2]. Декомпозиционный способ кинематического задания аппроксимативной изоповерхности можно абстрактно представить как результат траассировочного движения одной сплайновой навигационной изолинии параллельно самой себе

¹ Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами. М.: Физматлит, 2006. 360 с.

в трехмерном евклидовом пространстве с целью достижения эстетичности обобщенной формы геометрического объекта. Поэтому плоская электронная карта изолиний является одним из основных способов компьютерной визуализации двумерных скалярных полей данных. В общем случае навигационное пространство понимается трехмерным, и изоповерхность при этом играет лидирующую роль как геометрический образ согласованной концентрации навигационных изолиний. Навигационную изоповерхность с выбранными геометрическими свойствами можно трактовать как результирующую поверхность равных значений навигационных параметров в объеме евклидова навигационного пространства [3].

Обоснованием необходимости проведения исследования дифференциальных свойств навигационной изоповерхности является гипотеза большей вероятности реализации уточненного представления навигационной функции с лучшими дифференциальными свойствами для получения качественного результата финального приближения². Главная идея состоит в формировании изначального правильного суждения о математической близости геометрии приближаемой и приближающих функций при возможности исследовательского предоставления конкретных сведений о дифференциальных свойствах аппроксимируемой навигационной функции.

В ходе практической реализации исследования сформулированы следующие задачи:

1. Обосновать необходимость предварительного качественного исследования навигационной изоповерхности с целью обеспечения обоснованной гарантии успешного применения алгоритмов сплайн-аппроксимации.
2. Апробировать методику исследования астронавигационной изоповерхности на дифференцируемость на конкретном примере использования формулы счислимой высоты светила.
3. Рассмотреть вариативность практической применимости разработанного метода качественного исследования навигационной изоповерхности.
4. Разработать пакет прикладного программного обеспечения качественного исследования навигационной изоповерхности на языке программирования высокого уровня.
5. Объяснить теоретическую возможность практического применения методики качественного исследования перспективных инновационных изоповерхностей в целях технологического развития судовождения.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Ориентированная на многомерные задачи полиномиальная аппроксимация непрактична для класса дифференцируемых функций с малой гладкостью [4]. Вследствие данного факта объективно создается обязательное условие необходимости качественного характера исследования изоповерхности как композиции гильбертова пространства в вариационном сплайновом подходе с целью обоснованной постановки задачи построения оптимальной интерполяционной формулы любого функционала. Структура математической модели объекта исследования и характеристики теории приближения функций должны быть изометрически согласованы между собой и составлять единую информационную технологию при назначении фрагментарных областей аппроксимации в пространствах аргументов для оптимального выбора и выполнения аппроксимации [5].

Теоретическое исследование дифференциальных свойств предлагается апробировать на конкретном примере вычисления астронавигационного параметра высоты светила. Функциональная связь между высотой светила h и исходными данными о его положении на небесной сфере в виде известных его эфемерид склонения δ и местного часового угла t_m , а также координат зенита наблюдателя выражается традиционной формулой мореходной астрономии в классическом представлении³:

$$\sin(h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(t_m), \quad (1)$$

где h — высота светила;

² Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

³ Хлюстин Б. П. Мореходная астрономия. М. – Л.: ВМИ НКВМФ, 1939. 379 с.

φ — географическая широта;

δ — склонение светила как атрибут экваториальных систем координат;

t_M — местный часовой угол в практическом счете.

Как известно, местный часовой угол элементарно вычисляется по стандартной математической зависимости посредством использования гринвичского часового угла:

$$t_M = t_{Гр} \pm \lambda_W^E, \quad (2)$$

где λ — географическая долгота восточного или западного наименования;

$t_{Гр}$ — часовой угол на нулевом меридиане Гринвича.

Формула (1) расчета высоты светила в геометрическом представлении интерпретируется как четвертое измерение изогеометрической функциональной зависимости от трех функциональных аргументов: φ , δ , t_M . Предлагаемое исследование дифференциальных свойств астронавигационной изоповерхности не имеет аналогов в привычном навигационном понимании.

С целью организации изолинейного плавания [6] из формулы (1) можно получить модифицированное уравнение изолинии высоты светила в текущих координатах φ и λ как координат геометрических точек круга равных высот:

$$\sin(h) = \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(t_{Гр} \pm \lambda_W^E). \quad (3)$$

В процессе анализа формулы (3) можно сделать вывод о том, что величины h , δ , $t_{Гр}$ остаются постоянными, поскольку являются фактическими параметрами круга равных высот конкретного светила, а меняются только координаты φ и λ точек изолинии высоты светила. При определенных эфемеридах светила и известной его высоте, задаваясь значениями широты, можно фактически вычислять соответствующие координаты долготы на сфере по трансформированной из уравнения (3) конечной формулы вычисления долготы судна по известной широте:

$$t_{Гр} \pm \lambda_W^E = \arccos \left[\frac{\sin(h) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta)}{\cos(\varphi) \cdot \cos(\delta)} \right]. \quad (4)$$

Таким образом, на основе использования формулы (4) от любого судового времени можно перейти к гринвичскому времени с параллельным получением эфемерид светила: $t_{Гр}$, δ и учитывая постоянство высоты светила на конкретный момент времени по результатам расчета географических долгот в зависимости от заданных с фиксированным шагом географических широт, становится практически возможно нанести на сфере как модели Земли изолинию круга равных высот в качестве графического фактора практической организации изолинейного плавания.

Для проекционного представления четырехмерного изображения (1) предлагается последовательно применять *метод сечения параллельными плоскостями* для детализации дифференциальных свойств астронавигационной изоповерхности. Вычисление мгновенных значений числимой высоты светила с целью их графической визуализации на дисплее компьютера осуществляется при двух комбинаторных аргументах, заданных временно константами, по оси значений третьего вариативного аргумента с установленным равномерным шагом в диапазоне от минимального до максимального значения в известных в мореходной астрономии пределах величин:

$$\varphi \in [-90^\circ; +90^\circ]; \quad \delta \in [-90^\circ; +90^\circ]; \quad t \in [-180^\circ; +180^\circ]. \quad (5)$$

В классической аналитической зависимости для каждого значения аргумента существует значение функции, поэтому явная формализация не может представлять многозначную кривую. Данное ограничение можно компенсировать, используя неявное задание функции. Геометрическое представление классического уравнения (1) в неявной форме формализует астронавигационную изоповерхность в общем виде как математическую формализацию четырехмерной размерности:

$$F(\varphi, \delta, t, h) = 0. \quad (6)$$

Эффект, полученный за счет совершенствования численных методов, сравним с эффектом, достигаемым за счет повышения производительности компьютера. Оценка оптимальности от при-

менения новых численных методов при решении прикладных естественно-научных задач сводится к 40 % общего эффекта, достигаемого за счет применения новой вычислительной техники⁴.

Задача численного дифференцирования в пространстве непрерывных функций в строгом математическом понимании является некорректно поставленной при попытке прямого аналитического решения ввиду отсутствия непрерывной строгой зависимости от начальных данных, задача считается корректной, если ее решение существует, а также единственно и непрерывно зависит от входных данных⁵. Кроме того, следует отметить, что традиционно значения заданной навигационной функции являются неточными, что весьма существенно сказывается на результате решения некорректно поставленной задачи и усложняет ее решение. Как следствие, единственным практическим способом получения первоначального представления о дифференциальных свойствах аппроксимируемой навигационной функции является предлагаемый подход качественного исследования визуально гладкой изоповерхности на дифференцируемость.

Результаты (Results)

Средствами компьютерной графики на основе разработанного алгоритма выполняется геометрическая интерпретация поверхностных дифференциальных свойств уравнения счислимой высоты светила (1). Результатом работы разработанного программного модуля является получение последовательных проекций четырехмерного объекта, определяемого в неявном виде выражением (6). Необходимость проецирования уравнения (1) по фиксированным плоскостям обусловлена тем, что наглядное графическое представление уравнения счислимой высоты светила (3) в декартовых координатах невозможно для функции, состоящей более чем из двух переменных⁶. В трехмерном пространстве практически реализуемо в наглядной форме только графическое изображение функции двух переменных, как и для функции одной переменной.

В явной форме записи непосредственный расчет высоты светила формализуется из уравнения (3) как функции трех действительных аргументов традиционным способом:

$$h = \arcsin \left[\sin(\varphi) \cdot \sin(\delta) + \cos(\varphi) \cdot \cos(\delta) \cdot \cos(t_{\text{гр}} \pm \lambda_{\text{в}}^{\text{E}}) \right]. \quad (7)$$

При задании тридцати узловых равномерных точек по каждой из координатных осей φ , δ и t значения переменной высоты светила вычислялось 27000 раз в процессе вычислительного эксперимента. Идея геометрической интерпретации предлагаемой методики качественного исследования основана на парадигме *линий уровня*. На изоповерхности навигационная функция имеет постоянное значение. В плоскостном случае под точечным множеством одинаковых значений навигационных параметров понимается линия уровня как аналог изолинии в судовождении. В терминологии линий уровня подразумеваются проекции на *картинную плоскость* как следы пересечения графика многомерной навигационной функции с серией секущих параллельных фиксированных плоскостей, что, фактически, было выполнено в рамках проведенного вычислительного эксперимента.

Плоскостные изображения на компьютерном дисплее получают при визуализации расчетов значений счислимой высоты, с геометрической точки зрения являющихся фиксациями точек четырехмерной фигуры по линиям уровня, проецируемых по параллельным плоскостям на картинную плоскость с заданным равномерным шагом по каждой из координатных осей. Следы линий уровня образуются в результате проецирования на картинные плоскости поверхностей уровня при равных диапазонных значениях навигационной функции высоты светила, представляющими по факту сечения четырехмерной изогеометрической формы в формализации (1) с равномерным интервалом по шагу вычислений h по одной из координатных осей, когда двум другим аргу-

⁴ Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы [Электронный ресурс]. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. 639 с.

⁵ Квасов Б. И. Численные методы анализа и линейной алгебры: учеб. пособие. Новосибирск: НГУ, 2012. 262 с.

⁶ Бронштейн И.Н, Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1986. 544 с.

ментам на двух других осях эпизодически присвоены постоянные значения. Средствами компьютерной графики визуализируется подход качественного исследования на гладкость четырехмерного объекта изогеометрии на примере проецирования поверхностей уровня на картинную плоскость трехмерного евклидового пространства. Представленный рис. 1 является скриншотом с компьютерного дисплея как результат работы программы качественного исследования дифференцируемости астронавигационной изоповерхности.

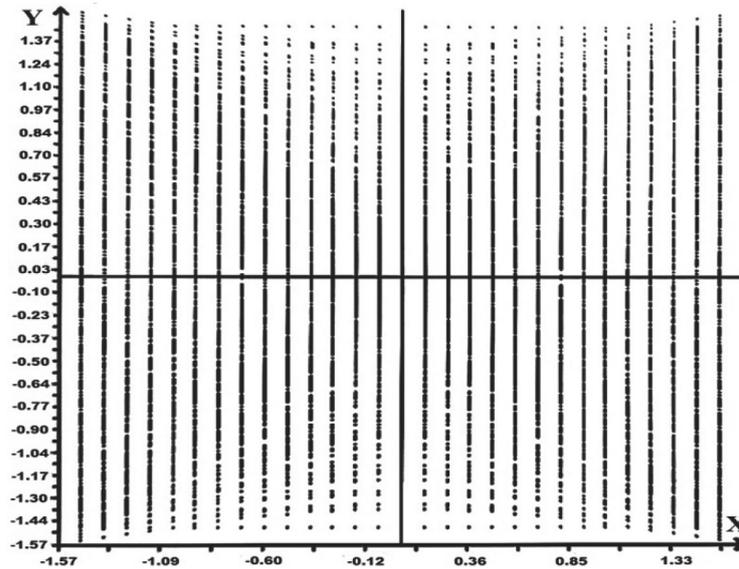


Рис. 1. Скриншот проекции регенерации изображения дифференциальных свойств астронавигационной изоповерхности

Представленный на рис. 1 скриншот является одним из вариантов многочисленных композиций проведенного качественного исследования астронавигационной изоповерхности. Анализ данного рисунка позволяет понять суть методики исследования дифференциальных свойств фигуры любой размерности при геометрическом построении сегментов контуров многомерной формы [7]. Каждое рассчитанное значение высоты светила фиксировалось визуализированной точкой на компьютерном экране в геометрической системе координат XOY . По оси абсцисс X откладывались значения широты, по оси ординат Y — высоты светила в соответствии с условиями (5) как одного из вариантов проекционного проектирования. Необходимо также отметить, что выражения (5) приведены в градусной мере, а на скриншоте применяется радианная мера. С целью ориентировки приводится замечание о соответствии градусной и радианной меры: $90^\circ = 1,57$ рад, а, следовательно, $180^\circ = 3,14$ рад.

На основе изучения скриншота сделан вывод о том, что при проведении вычислительного эксперимента использовалось в каждом случае 30 параллельных проекционных сечений. Так как в соответствии с разработанной методикой организация вычислений формировалась по линиям уровня, визуализация вычисленных значений счислимой высоты при их точечной прорисовке отразилась непосредственно в трассированных следах линий уровня на дисплее компьютера. В вычислительном эксперименте количество прорисованных точек и частота их расположения по каждой линии уровня определяется кривизной четырехмерной фигуры (6). Визуализированные на экране точки предоставляют базовую информацию о дифференциальных свойствах астронавигационной изоповерхности, поскольку они являются элементарными точечными растрами, из которых блочным образом формируется графическая база данных вариативного комплекса результатов расчетов высоты светила. Конечное множество прорисованных устойчивых периодических точек формирует фиксированное отображение подтвержденного гладкого многообразия геометрической формы в рамках практической реализации концепции диффеоморфизма многомерного пространства в зеркальном отображении [8].

Последовательность точек, каждая из которых характеризуется значениями выбранной системы координат, может быть представлена в двоичной системе как числовая матрица. Растровая графика представляет собой определенный набор пикселей, каждый из которых является отдельным компонентом визуализированной информации с выбранным тональным цветом и яркостью в определенной композиции компьютерной мозаики в двоичном коде. Пиксели фиксированного размера сгруппированы по матричному подобию в строки и столбцы, что соответствует битовой карте максимального разрешения дисплея. Зрение наблюдателя воспринимает объединенную совокупность пикселей на экране как изображение непрерывной линии в мелком масштабе. Одной из наиболее распространенных проблем растровой графики является ее ступенчатая визуализация, так как при увеличении масштаба возникает «лестничный эффект», под которым подразумевается распадение изображения непрерывной линии на отдельные сдвинутые между собой пиксели. Причина ступенчатого геометрического феномена объясняется сдвигом яркостных точек на экране компьютера, что приводит к мозаичному изображению с нечеткой различимостью отдельных деталей. При обычном скроллинге у растровых компонент линии увеличивается размер каждого пикселя при искусственном максимально крупном масштабе, и тем самым искажается оптическая иллюзия целостности электронных изобразительных линий ввиду потери определенных пикселей при синхронном дефекте имитации построения гладких алгебраических линий.

Фиксацией положения последовательности точек можно управлять с помощью *матричного преобразования*. Если точки располагаются на достаточно близких расстояниях, то при их визуализации будет создаваться впечатление, что наблюдается непрерывная линия (см. рис. 1). Как известно, плоская кривая может быть представлена совокупностью точек при условии их близкого расположения друг к другу. С математической точки зрения определение кривой по известному расположению ряда точек представляет решение задачи интерполяции. Например, с помощью полиномиальной интерполяции можно обеспечить прохождение кривой через известные точечные координаты. Для этого требуется определение коэффициентов полинома определенной степени. Реалистичная форма кривой линии, зафиксированной между заданными точками, зависит от порядка полинома и от граничных условий. Можно использовать также задачу аппроксимации, когда значения контрольных точек заданы с некоторой конечной точностью и необходимо определить оптимальную кривую, лучшим образом описывающую тенденцию представления геометрических данных. В вариативном контексте кривая может проходить только через некоторые из заданных точек, но может и не проходить ни через одну из них. Подобная задача сглаживания эмпирических данных возникает в случае, когда необходимо определить изогеометрию линии на основании результатов приблизительных измерений. Аппроксимирующая кривая формализует оценочные значения числовых данных на рассматриваемом диапазоне аргументации функции. Когда заданные точки содержат существенную неопределенность, применяют *метод наименьших квадратов*, минимизирующий сумму квадратов отклонений между фактическими и оцениваемыми навигационными параметрами при априорном или апостериорном способе⁷. Вследствие указанных фактов предварительное исследование дифференциальных свойств навигационной изоповерхности имеет принципиально важное значение для последующего правильного выбора интерполянта или аппроксиманта любой навигационной функции.

Принцип построения электронных изолиний состоит в том, как используются гридированные данные в координатной сетке с полученными эмпирическим способом значениями в каждой ячейке, визуализируемыми на компьютерном дисплее в виде изолинии. Дополнительно подложит определению, между какими из сеточных ячеек изолиния проходит посредством определения точек на сторонах координатной ячейки, в которых значение функционала равно значению изолинии. Данные точки находятся при помощи интерполяции или аппроксимации, а при необходимости используется *процедура сглаживания*. В целом необходимо отметить, что для определения

⁷ Ююкин И. В. Расчет вероятнейших координат местоположения судна с использованием матричного исчисления: учеб. пособие. СПб.: Изд-во ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова, 2024. 124 с.

координаты каждой точки, принадлежащей изолинии, необходимо предварительно воспользоваться непрерывностью рассматриваемой функции с целью заблаговременного исключения *эффекта самопересечений изолинии* [9]. В финале визуализации через определенные изометрические точки проводится непрерывный контур на основе сплайнового детерминированного метода в оптимальном варианте.

При компьютерной визуализации изолиний на четкость воспроизведения изображения оказывают влияние числовые различия между соседними ячейками сетки как масштабированными растровыми аналогами кластеров геометрических точек. Ввиду различий в расстояниях между соседними доменами в географическом пространстве числовые различия не могут точно отражать тенденции изменения особенностей дискретизации изолиний [10]. Следствием этого является частичная потеря дифференциации визуализированных данных в зависимости от их неопределенности. Отличительной особенностью навигационной изоповерхности является то, что горизонтальная и вертикальная координатная неопределенности для каждого экспериментального зондирования используются для создания сетки усредненных значений результатов измерений. По сути, компьютерный подход к проблеме генерации и обобщения комплекса изолиний из необработанных входных точек с позиций понятия *навигационной изоповерхности* основан на непрерывной интерполяции плоскометрических точек данных для наглядной визуализации изображения. При игнорировании растеризации сохраняются позиции всех входных точек в их точных контурных координатах в процессе математической обработки, что с точки зрения геометрической реализации априорно формирует кусочно-линейную поверхность как комплекс *линий уровня* в качестве аналогии изолиний.

Эффективный координатный набор гридированных узлов выполняет роль кусочно-алгоритмической основы для сплайнового синтезирования изоповерхности с целью *правдоподобной визуализации трехмерного отображения* [11]. Эффективное формирование шага триангуляции поверхности гридированных данных может позволить последовательно и корректно отображать числовые различия между соседними доменами каркасной сетки, что создает прецедент улучшения возможностей компьютерной визуализации [12]. Гридированные данные при этом интерпретируются как зафиксированные результаты измерений с формализованным представлением двумерной сетки для представления аппроксимативной изоповерхности в трехмерном пространстве. В местах стыковки сеточных парселей возможно несоответствие реальным данным. В то же время с улучшением качества компьютерного построения навигационной изоповерхности может в допустимых пределах ухудшаться скорость визуализации за счет алгоритмической необходимости воспроизведения более крупных патчей моделируемого каркаса 3D формата. Цифровую модель на основе гридированных данных с математической точки зрения можно характеризовать в конечном виде как классическую блочную матрицу, каждый элемент которой задействуется при визуализации изображения для каждого отдельного пикселя электронной изолинии как единичного атрибута навигационной изоповерхности. Точечные измерения, ориентировочно представляющие фиксированный элемент пространства, должны хорошо соотноситься с компьютерными пикселями как элементарными ячейками гридированной сетки при визуализации объектных атрибутов [13]. Область визуального восприятия информации также должна обладать высокой степенью пространственной однородности в пикселях для обеспечения *эффекта растеризации*. Игнорирование учета данной проблемы приводит к феномену несоответствия гридированных и визуализированных данных, показательно проявляющемуся в виде так называемого *лестничного эффекта* при ускоренном масштабировании отображения дисплея на основе традиционного компьютерного скроллинга [14].

Анализ рис. 1 позволяет сделать вывод о том, что на участках, где астронавигационная изоповерхность имеет фактическую кривизну, наблюдается четкая регенерация изображения проекций линий уровня благодаря часто расположенным визуализированным точкам, соответствующим фактическим вычислениям значений высоты любого небесного ориентира. На некоторых участках изоповерхности с минимальной кривизной наблюдаются разреженные прорисованные вычислительные точки, по сути, представляющие собой проекции условных искаженных изолиний.

Методика оперирования искаженными изолиниями апробирована на основе авторского прикладного программного обеспечения [15]. Из анализа геометрической интерпретации (см. рис. 1) можно сделать вывод об отсутствии обширных белых пятен относительно смежных точек, где бы наблюдались значительные пропуски точечных визуализаций, появление которых могло свидетельствовать об имеющихся местах фактических дифференциальных разрывов астронавигационной изоповерхности (1). Гипотетическое появление на рис. 1 протяженных пропусков точечных прорисовок по следам проекционных сечений может свидетельствовать о вероятности графических разрывов самой астронавигационной изоповерхности как геометрического объекта.

Таким образом, наглядное представление в проекциях по линиям уровня четырехмерного измерения (см. рис. 1) подтверждает отсутствие явных функциональных разрывов в исследуемом на дифференцирование уравнения (1) оригинальным способом. Полученная геометрическая интерпретация позволяет сделать заключение, что навигационная функция высоты светила практически не имеет графических разрывов и неопределенностей и является вследствие этого дифференцируемой с максимально допустимым дефектом непрерывности производной, обычно на единицу меньшим, чем степень сплайна. Допустимые дефекты гладкости сплайн-аппроксимации уже на предварительном этапе наблюдаются визуально самым наглядным образом при анализе скриншота проекции геометрической интерпретации дифференциальных свойств астронавигационной изоповерхности (см. рис. 1).

В результате проведенного качественного исследования астронавигационной изоповерхности получено экспериментальное подтверждение о правомерности применения методов сплайн-аппроксимаций к вычислительным реализациям счислимой высоты светила по формуле (1). Применимость математического аппарата кусочных аппроксимаций к любой математической формализации основывается на непреломном условии дифференциальной гладкости функциональной зависимости. Проведенное качественное исследование навигационной функции счислимой высоты светила эмпирическим путем доказывает ее «гладкость» и, как следствие, возможности обоснованного применения сплайновой интерполяции или аппроксимации. Условная визуализация по линиям уровня протяженных четких белых пятен вычислительных реализаций опровергла бы саму возможность синтеза навигационной изоповерхности с позиций методов сплайн-функций. Внимательный анализ рис. 1 с геометрической точки зрения позволяет сделать прогностический вывод об гарантированной успешности применения кубических аппроксимантов к моделированию астронавигационной изоповерхности.

В процессе изучения проблемы точного приближения кривизны сложной изолинии допускается практическая возможность изгиба плоской кривой в физическом пространстве с возможностью существования ограниченного количества точек разрыва. Предусмотрительный учет рассматриваемого геометрического эффекта создает теоретическую предпосылку синтеза сложных навигационных изолиний. Вариации решения задачи сводятся к плановому подбору сплайновой модификации по степени «гладкости» на основе предварительной информации качественного исследования навигационной изоповерхности. С геометрической точки зрения кубический сплайн является наиболее предпочтительным формосохраняющим интерполянтном, поскольку он формирует пространственную «гладкую» кривую как фрагментарную часть изоповерхности [16]. При этом кубический сплайн понимается как кусочно-полиномиальная дважды непрерывно дифференцируемая функция однократного дефекта, составленная из фрагментов кубических многочленов.

При рассмотрении вопроса манипулирования формой восстанавливаемого кубическим сплайном математического объекта в парадигме изометрического анализа предполагается вероятность изгиба «гладкой» кривой с допустимым максимумом ситуации однократного разрыва производной функции [17]. Данный геометрический эффект ориентирует исследователя на теоретическую возможность синтеза сложных изолиний. Для получения оптимальной интерполяции с математической точки зрения выгодно использовать кусочные полиномы третьей степени. Фактически кубический сплайн задает своими конструктивными особенностями иде-

альный вариант приближения, так как применение сплайна меньшей степени автоматически приведет к возможности расходимости самого процесса интерполяции ввиду понижения «гладкости» алгебраической кривой.

Кубический сплайн имеет максимальный класс «гладкости», обеспечивающий наличие непрерывности вторых производных в серии точек «склейки» кусочной конструкции. Дифференцируемость до вторых производных в точках многозвенного соединения однозначно не создает «гладкости» кубического сплайна в смысле приближения минимума кривизны искусственно синтезируемой плоской кривой. Для того чтобы получить минимум кривизны или максимум «гладкости», в соответствии с *гипотезой Шёнберга* о взаимосвязи сплайнов [18], необходимо дополнительно обеспечить правильную ориентацию набора контрольных вершин характеристического многоугольника сплайнового базиса.

В случае получения положительного результата исследования дифференциальных свойств навигационной изоповерхности следует ожидать гарантированную точность сплайн-аппроксимации кубическими сплайнами 10^{-6} – 10^{-8} как погрешности навигационного параметра, полученную эмпирическим путем на основе авторского вычислительного эксперимента [19]. При решении уравнения высоты светила (1) *методом последовательной полиномиальной сплайн-интерполяции* следует ожидать увеличение быстродействия расчетов не менее 30 % по сравнению со стандартными компьютерными решениями с помощью разложения в ряд Тейлора, что практически обеспечивает возможность выполнения навигационных вычислений тригонометрических компонент в масштабе реального времени [20]. В доказательном примере определения повышения скорости вычислительных операций была использована формула (7), но фактически интерполировались только функции синуса и арксинуса, а значения косинуса рассчитывались по формулам приведения посредством использования интерполированных значений синуса. Данные получены по результатам авторских вычислительных экспериментов по результатам проверок на тестовых примерах. Время работы программно-реализованных алгоритмов замерялось в тысячных долях секунды с закливанием на 100000 при решении одинаковых тестовых задач.

В настоящее время кубические сплайны являются важнейшим инструментом аппроксимации функций [21]. Хорошие дифференциальные свойства и алгоритмичность делают аппарат кубических сплайнов универсальным инновационным средством обработки разнообразной навигационной информации. Поэтому для получения эффективной аппроксимации и предлагается использовать кусочные полиномы третьей степени. Апробированный кубический сплайн имеет класс «гладкости» C^2 при минимальном компактном носителе, что позволяет интерпретировать указанный математический феномен как *экстремальный сплайн* наивысшей «гладкости». Таким образом, кубический сплайн воспроизводит функциональную непрерывность до второго порядка в местах соединений кусочных полиномов, но однократный дефект во внутренних точках сегментных соединений непосредственно не гарантирует «гладкости» сплайна в контексте минимума кривизны вдоль изолинии на всем интервале построения. Для того чтобы получить минимум кривизны, а следовательно, и максимум «гладкости» должны быть минимизированы сплайновые коэффициенты для каждого сеточного отрезка за счет правильного выбора диапазона изменения математических параметров и специальных граничных условий для точного воспроизведения наклонов алгебраической кривой в концевых участках общего отрезка аргументации аппроксимации.

Свойство экстремальности позволяет практически решить важную задачу приближения сплайнами со «сглаживанием» исходных данных в ситуации, когда в измерениях присутствует ожидаемая погрешность. *Сглаживающий сплайн* характеризуется устойчивостью приближения к заданным исходным значениям в окрестности допустимых отклонений за счет применения «весовых» коэффициентов в отличие от интерполяционного сплайна, строго проходящего через все позиции измеренных данных. По сравнению с интерполяционным сплайном эволюция до сглаживающего сплайна требует большего объема вычислительных операций. При решении вопроса о том, какой сплайн синтезировать, необходимо в первую очередь учитывать погрешности информационных

данных, а также дифференциальные свойства моделируемого объекта. Практически бесполезным является применение сглаживающего сплайна, когда экспериментальная информация задана с точностью, сопоставимой с погрешностью представления чисел в двоичной системе счисления компьютерных вычислительных операций. Хорошие аппроксимативные свойства в сочетании с эффективностью компьютерных реализаций возводят кубические сплайны в ранг оптимального средства решения различных прикладных математических задач судовождения.

В результате проведенного специального исследования теоретической оптимальности аппроксиманта обоснованный выбор сделан на основе построения кубических функций [15]. Фактически кубический сплайн задает своими конструктивными особенностями идеальный вариант приближения, так как применение сплайна меньшей степени автоматически приведет к возможности расходимости самого процесса интерполяции ввиду понижения «гладкости» алгебраической кривой. Поскольку в качестве оптимального варианта в постановке задачи четкости визуализации синтезированного геометрического объекта требуется *дифференцируемая функция*, следует обратиться к кубическим сплайнам как чрезвычайно гибкой конструкции, позволяющей осуществить наилучшие математические приближения. Универсальным и удобным в вычислительном смысле оказывается применение *кусочно-кубических многочленов* для приближения плоских кривых и *кусочно-бикубических многочленов* для представления «гладких» поверхностей. При современном использовании компьютерных технологий появляется реальная возможность при решении разнообразных задач применять в математическом обеспечении кубические сплайновые конструкции для создания реалистичности проекционного изображения изометрической модели при обоснованной вычислительной устойчивости перспективных сплайновых алгоритмов.

Сплайн третьей степени как минимум один раз непрерывно дифференцируем по каждой из переменных, т. е. соседние позиционные сеточные ячейки как асимптотические четырехугольники, сегментным образом синтезирующие навигационную изоповерхность, гладко склеены между собой до непрерывности второй производной [22]. При этом изоповерхность распадается на конечное множество клеток с локальными кусочно-аналитическими описаниями. Фактор *кусочности* эффективным математическим образом формирует дифференциальные свойства синтезируемой навигационной изоповерхности. Под математической «гладкостью» традиционно подразумевается успешность функциональной дифференцируемости. Лидирующая роль сплайнов третьей степени однозначно проявляется при компьютерной визуализации программных алгоритмов удобочитаемостью графических визуализаций и практическим отсутствием графических искажений.

Предположим, что качественное исследование дифференциальных свойств навигационной функции выявило у абстрактной изолинии как частного случая навигационной изоповерхности графическую трансформацию с точками разрыва. Гипотетическая интерпретация вариативности предполагаемой ситуации смоделирована в виде рис. 2 абстрактным образом.

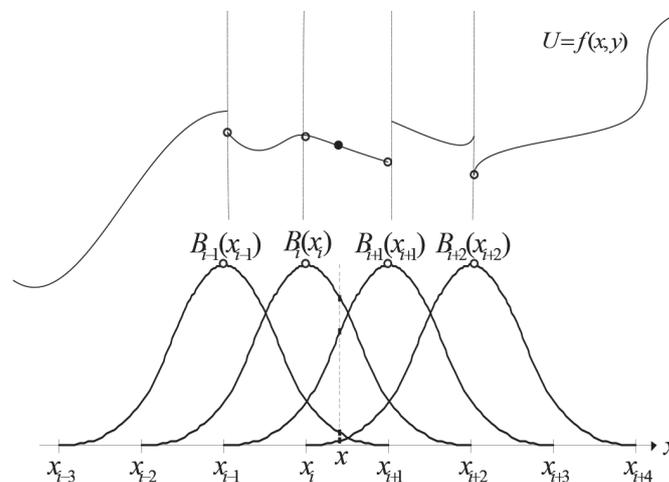


Рис. 2. Гипотетическая интерпретация аппроксимации кубическими сплайнами абстрактной искаженной изолинии

Имитированные точки функционального разрыва x_{i-1} , x_{i+1} , x_{i+2} на рис. 2 фактически фиксируются визуальным образом как отсутствие прорисовки на рис. 1 в разреженных локальных областях при качественном исследовании уравнения (1) на дифференцируемость. Предлагается пересмотреть стереотипное абстрагирование от геометрической интерпретации искаженной изолинии, поскольку методы сплайн-функций позволяют оперировать с такими сложными алгебраическими объектами, как разрывные изолинии, подобных геометрическому объекту, интерпретируемому на рис. 2. Относительная сложность представленной абстрактной изолинии обуславливается вариативным наличием существования трех внутренних точек разрыва в координатах x_{i-1} , x_{i+1} , x_{i+2} (см. рис. 2). Функциональные разрывы рассматриваются как предельные случаи математического искажения изолинии. В классической постановке вопроса в теории аппроксимации, считается, что во внутренних изолинейных точках разрыва навигационная функция $U = f(x, y)$ условно не определена.

Фактически с позиций теории приближения функций кусочная функция $S(x)$ имеет два значения в каждой позиции разрывности, а именно: функциональное значение слева определяется левым сплайновым многочленом, значение функции справа — правым многочленом. Для определенности предлагается выбирать в каждой точке разрыва значение справа, т. е. условно считать, что сплайн является *непрерывной экстраполированной функцией*, что дает определенную однозначность устойчивой программной реализации алгоритма. Для преобразования точки разрыва левый и правый многочлен виртуально «склеиваются» в один удлиненный правый с организацией унимодальной функции, уменьшающей вариацию. Таким образом, точка разрыва обладает свойством строгого альтернирования в смысле совпадения по значению с правым многочленом при абстрагировании от фактического существования функциональной неопределенности ввиду формального условия фактического «отсутствия узла» в точке разрыва.

Предположение о принципиальной возможности моделирования разрывной изолинии является авторской точкой зрения на перспективу аппроксимации искаженной навигационной изолинии кубическими сплайнами. С математической точки зрения при этом можно по-прежнему традиционно считать, что функция $U = f(x, y)$ имеет два условных значения в каждой точке разрыва. Однако при кусочно-многочленной аппроксимации для кубического случая теоретически допускается ситуация разрыва одной производной при так называемом *существовании однократного дефекта сплайна*, что позволяет в данном случае игнорировать факт двойственности функциональных значений.

Как показано на рис. 2, для получения наибольших порядков приближения навигационной функции точки разрыва должны быть включены в число узлов координатной сетки независимым образом в качестве дополнительного условия. Если при восстановлении искаженной изолинии не позаботиться о целесообразности принятия таких специальных математических мер, то для кубического сплайна будет характерным появление флуктуирующих осцилляций. При оптимальном выборе серии узлов наличие разрыва практически не влияет на стратегическое поведение сплайновой конструкции в теоретическом точном понимании процесса аппроксимации.

Предлагаемый подход позволяет считать искаженную изолинию практически идентичной кусочно-многочленной функции с принципиально возможным применением к синтезированию разрывной изолинии в полной мере аппарата сплайн-функций. Благодаря данной точке зрения отпадает тактическая необходимость применения сложных рутинных математических процедур при анализе применимости кубического аппроксиматора в точке объективно оцениваемого формального разрыва. В соответствии с этим программная реализация разработанных алгоритмов практически не меняется по содержанию, за исключением добавления в цикл паскаль-программы эпизодического логического условия приравнивания в точке разрыва искаженной изолинии по функциональности значения справа. Таким образом, кубическая кусочно-многочленная функция в прикладной программе искусственно рассматривается как непрерывная функция справа, что фактически однозначно создает возможность использования в обработке навигационной информации искаженной изолинии как таковой.

Поскольку искаженная изолиния имеет фактологию сложной математической формализации, классическим путем решить навигационную задачу невозможно, в отличие от синтеза искаженных изолиний методами сплайн-интерполяции, который не представляет реальной математической проблемы с позиций аппарата кусочных аппроксимаций. Несмотря на алгоритмические затруднения обработки информации с учетом традиционного представления о математической неформализуемости разрывных в дифференциальном контексте изолиний, возможное решение проблемы разрывов изолиний при их визуализации уже существует [23]. Выполненное исследование может принципиально изменить сформировавшуюся позицию на основе возможности проведения качественного исследования астронавигационной изоповерхности на предварительном самой аппроксимации этапе. Изложенная гипотеза позволяет непосредственно использовать анализ дифференциальных свойств навигационной функции в обработке навигационной информации.

В рамках предлагаемой методики выдвигается точка зрения гипотетической возможности проведения качественного исследования на дифференцируемость многомерной навигационной изоповерхности любой размерности изогеометрии. При практическом использовании разработанной методики качественного исследования дифференциальных свойств приближаемой навигационной функции ее размерность фактически определяет только количество проекций по линиям уровня.

Предполагается использование разработанной методики совместно с подходом поиска ошибок измерений в скалярном поле навигационных параметров как реалистичную проверку достоверности больших геопространственных данных [24]. Самостоятельный интерес математических основ судовождения представляет дополнительная возможность использования авторского алгоритма для поиска фатальных ошибок измерений в скалярном поле навигационных параметров при наличии значительного массива данных эксперимента методом компьютерной визуализации синтезируемой сплайновой изоповерхности. Предлагаемый новый подход может значительно упростить предварительный анализ апостериорной точности обширной базы данных, обеспечив последовательное адекватное использование навигационных параметров. Поскольку прерогативой предлагаемого метода является формальный поиск флуктационных ошибок, в рамках рассматриваемого подхода, нет необходимости задействовать специальные методы компьютерной анимации. Фиктивность измерений однозначно обнаруживается по шумовому пику промаха, неизбежно возникающему вследствие нарушения «гладкости» восстановленной сплайновой изоповерхности. Данная ошибка оперативно может быть исключена из файла данных измерений с минимальными временными затратами на обработку информации.

Практический синтез структуры навигационной изоповерхности любой сложности в комбинации с оригинальным методом исследования дифференцируемости обеспечивается функционированием программного обеспечения в автономной программной графической среде без привлечения зарубежных фирменных средств аффилированной компьютерной визуализации. Универсальность составленных программ обеспечивает качественное исследование дифференциальных свойств геометрического объекта любой размерности как вариативности широкого класса навигационных функций. Разработанный пакет прикладных программ является многофункциональным по возможности расчета и визуализации на компьютерном дисплее электронных проекций любой навигационной изоповерхности при использовании авторской программной оболочки. Перед аппроксимацией для синтезируемой изоповерхности следует делать геометрическую оценку сложности аппроксимируемого объекта с целью выбора оптимального способа решения задачи последующей аппроксимации. С этой целью автором статьи разработана специальная эффективная методика предварительного качественного исследования навигационной изоповерхности.

Актуальность постановки необходимости заблаговременного проведения качественного исследования навигационных изоповерхностей с целью их последующей аппроксимации с единых позиций теории сплайн-функций согласуется с прогнозированием появления сложных новейших навигационных изолиний, которые в перспективе придется применять в процессе технологической эволюции технических средств судовождения.

Обсуждение (Discussion)

В условиях развития платформы географических информационных систем (ГИС) при тематической обработки больших геопространственных данных создается прецедент ориентирования на унифицированную информацию при интегральном оценочно-прогнозном картографировании. В геометрической прогрессии возрастает значимость современности, достоверности и точности пространственных данных, что предъявляет высокие требования к их своевременному виртуальному обновлению в оперативные сроки. Формирование единого геоинформационного пространства на основе телекоммуникационных сетей с условием использования базы пространственных данных стимулирует комплексные решения в сфере автоматизации геоинформационного картографирования при создании анимационных изображений на основе ГИС⁸. В этом направлении впервые была отчетливо обозначена роль рекомендательных карт как средства обеспечения принятия решений.

По мнению известного американского картографа Дж. Л. Моррисона — бывшего президента Международной картографической ассоциации, имеющего большой опыт работы в геологической съемке США, картографическое производство, ориентированное на аналоговые методы составления и издания карт, безнадежно устарело и должно быть целиком переведено на эффективные электронные технологии с центром внимания на новые методы вычислительной математики [25]. Перспективы развития картографии в обозримом будущем связываются прежде всего с геоинформационными технологиями. Практическое совершенствование методов ГИС исключают необходимость готовить печатные тиражи карт или других изображений, поскольку в любой момент в режиме реального времени уже можно получить на компьютерном экране визуализированное изображение любого географического объекта. Внедрение электронных технологий фактически означает конец трехсотлетнего периода картографического черчения и издания печатной картографической продукции. При условии отказа в восприятии прогноза Дж. Л. Моррисона в качестве фантазии на картографические сюжеты авторитетное предположение экстраполирует современные тенденции электронной картографии и обеспечивает реалистичность ГИС на ближайшую временную перспективу.

Предоставление новых возможностей для пространственного анализа географических данных реализуется за счет оптимального подбора фактора гридирования при эффективном использовании специфичной математической сетки, что приводит к улучшению демонстрации изолиний на дисплее компьютера [12]. Пространственная компонента платформы картографических данных большой размерности стала объектом глобального внимания в вопросе современной обработки массивных геолокализированных данных, в которых местоположение является дополнительным атрибутом размерности [26]. В контексте геопространственных данных пространство и время неразрывно связаны, поскольку многие источники больших данных содержат временную информацию. Пространство может восприниматься как абстрактное, в то время как местоположение судна является всегда реалистичным, с чем судоводители обычно отождествляют себя в отображении позиционирования как части пространства. Обсервация как символ геоиконики придает географическому пространству однозначную фиксированность. Именно эти особенности многомерного местоположения судна могут быть смоделированы и спроецированы на электронную морскую карту. Интерфейсы картографирования больших данных способны привести к созданию картографии будущего, которая концептуализирует и визуализирует сложные представления о месте и пространстве в сочетании с фактором временного измерения. Это обещает дать картографам возможность решать нетривиальные проблемы компьютерной графики, связанные с достоверной геолокацией.

В течение последнего десятилетия геовизуализация претерпела значительную эволюцию в комплексный подход к исследованию, анализу и пониманию геопространственного феномена с целью поиска лучшей практики манипулирования картами с помощью цифрового взаимодействия [27]. Развитие геовизуализации было обусловлено доступностью разнообразных крупно-

⁸ Берлянт А. М. Геоинформационное картографирование. М.: МГУ, 1997. 64 с.

масштабных геопространственных данных и достижениями в области технологий визуализации. Интеграция визуальной аналитики позволила внедрить расширенные технологические возможности в интерактивную визуализацию при улучшении обработки крупномасштабных данных. Следовательно, акцент сместился на поддержку принятия обоснованных решений в режиме реального времени и совместный анализ, одновременно способствуя ориентированному на пользователя практическому использованию подхода к визуализации и анализу геопространственных данных. Искусственный интеллект формирует будущее геовизуализации. Геопространственные данные большой разрешающей возможности [28] предполагают значительное смещение акцента с традиционной обработки инфраструктур универсальных данных путем принятия подхода, основанного на общих веб-стандартах, в эффективное функционирование геоинформационных систем с учетом мобильных устройств, высокопроизводительных сенсорных, жестовых, голосовых интерфейсов, облачных вычислений, дополненной реальности и других значительных достижений технологий.

Парадигма теоретизации визуальной аналитики виртуального картографирования представляют собой новый набор возможностей для синергии между обработкой и совместным анализом географических и кибернетических данных с целью достижения создания образцовых значимых карт с использованием больших геопространственных данных. Объем больших данных может значительно варьироваться от нескольких миллионов точек данных в наборе данных о перемещении в виде траекторий движения, до петабайт в источниках изображений [29]. Общим для различных размеров данных является то, что объем превышает возможности современных вычислительных систем по обработке информации.

Долгосрочное аналитическое взаимодействие со сложными пространственно-временными проблемами и большими геопространственными данными необходимо расценивать как стимул к действию по использованию прогрессивных возможностей ключевых аспектов морской картографии. Процесс создания карты по своей сути ориентируется на феномен обобщения, позволяющим найти здравый смысл в картографическом производстве векторных электронных карт [19]. По мере того как традиционные источники данных стереотипно ориентируются на возможности точно описывать каждую деталь морской навигационной карты, способы генерализации морского рельефа должны адаптироваться для обработки крупномасштабных данных на основе компьютерной географической визуализации. Требования к картографической абстракции в виде генерализации рельефа усиливаются при переходе к использованию систем скоординированного просмотра картографических визуализаций.

Интеграция технологии голосовых помощников в платформы визуализации и обработки геопространственных данных повышает доступность и интерактивность пользователей. Традиционные инструменты ГИС по ключевым вопросам часто создают проблемы для пользователей, не обладающих техническими знаниями, из-за сложных интерфейсов и терминологии. Веб-приложение с поддержкой голосовой связи устраняет эти ограничения за счет способности понимать команды, относящиеся к конкретной предметной области, для беспрепятственного взаимодействия с геопространственными данными. Перспективная система обрабатывает голосовые вводы для таких задач, как навигация по определенным координатам, переключение слоев и наложение геопространственных данных. Тестирование на реальных запросах позволило добиться 93 % точности преобразования голосовых команд в практические результаты, такие как управление информационными слоями в процессе навигации по электронной карте [30]. Результаты демонстрируют способность системы снижать когнитивную нагрузку, обеспечивая при этом естественное взаимодействие с геопространственными данными. Данное исследование предлагает масштабируемое решение для повышения удобства использования ГИС, прокладывая путь к более интуитивно понятным, доступным и интерактивным геопространственным инструментам.

Ввиду перспективной важности надлежущая математическая обработка морских пространственных данных обретает приоритет в предоставлении конечным пользователям обоснованной информации для различных целей, включая разработку политики принятия решений, управление

морской средой, морское пространственное планирование на основе улучшенной графической визуализации географических данных.

Выводы (Summary)

Проведенное исследование применения позволяет сделать следующие выводы:

1. Обоснована необходимость предварительного качественного исследования навигационной изоповерхности для обеспечения гарантии успешного применения алгоритмов сплайн-аппроксимации.
2. Апробирование применения методики исследования астронавигационной изоповерхности на дифференцируемость на конкретном примере формализации расчета высоты светила.
3. Рассмотрена вариативность практической применимости разработанного метода качественного исследования навигационной изоповерхности.
4. Разработан пакет прикладных паскаль-программ для исследования дифференциальных свойств любой навигационной изоповерхности.
5. Дано объяснение возможности практического применения оригинальной методики для будущих изоповерхностей, появление которых обусловлено технологическими инновациями судовождения.
6. Сопоставимый результат в современных научных публикациях отсутствует.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Квасов Б. И. Методы изогометрической аппроксимации сплайнами: автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук; специальность: 01.01.07 «Вычислительная математика» / Б. И. Квасов. — Новосибирск, 1997. — 34 с. — EDN ZJIMNH.
2. Kvasov B. I. Methods of Shape-Preserving Spline Approximation / B. I. Kvasov — Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. — 338 p. DOI: 10.1142/4172.
3. Ююкин И. В. Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639. — EDN KSECWZ.
4. Болтаев А. К. Об оптимальной интерполяционной формуле на классах дифференцируемых функций / А. К. Болтаев // Проблемы вычислительной и прикладной математики. — 2021. — № 4(34). — С. 96–105. — EDN AAAQXQ.
5. Лапшин Э. В. Кусочно-линейная интерполяция функций многих аргументов / Э. В. Лапшин, И. Ю. Семочкина, В. В. Самаров // Надежность и качество сложных систем. — 2017. — № 4(20). — С. 42–48. DOI: 10.21685/2307-4205-2017-4-6. — EDN YNRRUM.
6. Ююкин И. В. Применение сплайновых интерполирующих функций в парадигме универсального стандарта обмена цифровыми гидрографическими данными / И. В. Ююкин // Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 6. — С. 875–890. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-875-890. — EDN NNYQKH.
7. Стародетко Е. А. Методы описания и преобразования геометрической информации в автоматизированных системах технической подготовки производства: автореф. дисс. ... д-ра техн. наук / Е. А. Стародетко. — М., 1974. — 26 с.
8. Васильева Е. В. Устойчивость периодических точек диффеоморфизмов многомерного пространства / Е. В. Васильева // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2018. — Т. 5. — № 3. — С. 356–366. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.302. — EDN XYTJDF.
9. Курахтенков Л. В. Разработка алгоритма построения изолиний по рассчитанным данным на сферической поверхности / Л. В. Курахтенков, А. А. Кучумов, К. Ю. Шкиль // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2017. — Т. 11. — № 5. — С. 21–25. — EDN YRQARP.
10. Wang W. Isoline extraction based on a global hexagonal grid / W. Wang, L. Zhou, A-X. Zhu, G. Lv // Cartography and Geographic Information Science. — 2025. — Vol. 52. — Is. 3. — Pp. 299–313. DOI: 10.1080/15230406.2024.2359709.

11. *Smith W. H. F.* Gridding with Continuous Curvature Splines in Tension / W. H. F. Smith, P. Wessel // *Geophysics*. — 1990. — Vol. 55. — Is 3. — Pp. 293–305. DOI: 10.1190/1.1442837.

12. *Ююкин И. В.* Сплайновая модель оперирования гридированными данными как принцип электронного картографирования топографии морского дна / И. В. Ююкин // *Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2022. — Т. 14. — № 5. — С. 656–675. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-5-656-675. — EDN PCOОВТ.

13. *Costan A.* Grid Data Handling / A. Costan // *Computational and Data Grids: Principles, Applications and Design*. — Hershey: Information Science Reference, 2012. — Pp. 112–139. DOI: 10.4018/978-1-61350-113-9.ch005.

14. *Souri A. H.* Dealing with spatial heterogeneity in pointwise-to-gridded-data comparisons / A. H. Sour, K. Chance, K. Sun, X. Liu, M. S. Johnson // *Atmospheric Measurement Techniques*. — 2022. — Vol. 15. — Is. 1. — Pp. 41–59. DOI: 10.5194/amt-15-41-2022.

15. *Ююкин И. В.* Синтез кубическими сплайнами искаженной изолинии в аспекте использования дифференциального режима спутниковой навигации / И. В. Ююкин // *Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2021. — Т. 13. — № 3. — С. 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358. — EDN JJUGRO.

16. *Kvasov B.* Weighted cubic and biharmonic splines / B. Kvasov, T-W. Kim // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. — 2017. — Vol. 57. — Is. 1. — Pp. 26–44.

17. *Taheri A. H.* Adaptive w-refinement: A new paradigm in isogeometric analysis / A. H. Taheri, K. Suresh // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2020. — Vol. 368. — Pp. 113180. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113180.

18. *Schoenberg I. J.* Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions / I. J. Schoenberg // *Quarterly of Applied Mathematics*. — 1946. — Vol. 4. — № 1. — Pp. 45–99. DOI: 10.1090/qam/15914.

19. *Ююкин И. В.* Генерализация изображения подводного рельефа методом сплайновой аппроксимации на векторной электронной карте / И. В. Ююкин // *Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2024. — Т. 16. — № 6. — С. 910–934. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-6-910-934. — EDN QQIVCX.

20. *Ююкин И. В.* Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // *Вестник государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова*. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036. — EDN PSJYOY.

21. *Волков Ю. С.* О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами / Ю. С. Волков, В. В. Богданов // *Сибирский математический журнал*. — 2020. — Т. 61. — № 5. — С. 1001–1008. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.503. — EDN RSQEMT.

22. *Wang H.* Construction of B-spline surface from cubic B-spline asymptotic quadrilateral / H. Wang, C. G. Zhu, C. Y. Li // *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing*. — 2017. — Vol. 11. — Is. 4. — Pp. JAMDSM0044. DOI: 10.1299/jamdsm.2017jamdsm0044.

23. *Воробьева Г. Р.* К вопросу построения пространственных изолиний для нерегулярных сетей мониторинга / Г. Р. Воробьева, Э. Ф. Фарваев // *Информационные технологии*. — 2024. — Т. 30. — № 10. — С. 544–552. DOI: 10.17587/it.30.544–552. — EDN TZFAHR.

24. *Ююкин И. В.* Поиск ошибок в базе навигационных данных методом визуализации сплайновой изоповерхности / И. В. Ююкин // *Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова*. — 2020. — Т. 12. — № 3. — С. 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491. — EDN MUGGZV.

25. *Моррисон Дж. Л.* Картография нового тысячелетия / Дж. Л. Моррисон // *Геодезия и картография*. — 1996. — № 8. — С. 45–48.

26. *Loukili Y.* Geospatial big data platforms: A comprehensive review / Y. Loukili, Y. Lakhrissi, S. E. B. Ali // *KN — Journal of Cartography and Geographic Information*. — 2022. — Vol. 72. — Is. 4. — Pp. 293–308. DOI: 10.1007/s42489-022-00121-7.

27. *Andrienko N.* Geovisualization: past, present, and future / N. Andrienko, G. Andrienko // *International Journal of Cartography*. — 2025. — Vol. 11. — Is. 2. — Pp. 224–234. DOI: 10.1080/23729333.2025.2475410.

28. *Li Z.* Geospatial Big Data Handling with High Performance Computing: Current Approaches and Future Directions / Z. Li // *High Performance Computing for Geospatial Applications* — Springer International Publishing, 2020. — С. 53–76. DOI: 10.1007/978-3-030-47998-5_4.

29. *Robinson A. C.* Geospatial big data and cartography: research challenges and opportunities for making maps that matter / A. C. Robinson, U. Demšar, A. B. Moore, A. Buckley, B. Jiang, K. Field, M-J. Kraak, S. P. Cam-

boim, C. R. Sluter // International Journal of Cartography. — 2017. — Vol. 3. — Is. sup1. — Pp. 32–60. DOI: 10.1080/23729333.2016.1278151.

30. Jamil D. Exploring Geospatial Mapping through Speech Commands / D. Jamil, D. JyotiPatra, P. Kumar, S. Kar, P. Ghosh, S. Das, M. A. Mondal // 2025 International Conference on Computer, Electrical & Communication Engineering (ICCECE) 2025. — C. 1–7. DOI: 10.1109/ICCECE61355.2025.10940999.

REFERENCES

1. Kvasov, B. I. Metody izogeometricheskoy approksimatsii splaynami. Abstract of Grand PhD diss. Novosibirsk, 1997.
2. Kvasov, B. I. *Methods of Shape-Preserving Spline Approximation* Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2000. DOI: 10.1142/4172.
3. Yuyukin, I. V. “Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
4. Boltaev, A. K. “On the optimal interpolation formula on classes of differentiable functions.” *Problemy vychislitel'noy i prikladnoy matematiki* 4(34) (2021): 96–105.
5. Lapshin, E. V., I. Yu. Semochkina and V. V. Samarov. “Kusochno-lineynaya interpolyatsiya funktsiy mnogikh argumentov.” *Reliability & Quality Of Complex Systems* 4(20) (2017): 42–48. DOI: 10.21685/2307-4205-2017-4-6.
6. Yuyukin, I. V. “Application of spline interpolating functions in the paradigm of the universal standard exchange of digital hydrographic data.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 14.6 (2022): 875–890. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-875-890.
7. Starodetko, E. A. Metody opisaniya i preobrazovaniya geometricheskoy informatsii v avtomatizirovannykh sistemah tehnicheskoy podgotovki proizvodstva. Abstract of Grand PhD diss. M., 1974.
8. Vasil'eva, E. V. “Stability of periodic points of diffeomorphisms of multidimensional space.” *Vestnik Of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy* 5.3 (2018): 356–366. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.302.
9. Kurakhtenkov, L. V., A. A. Kuchumov and K. Yu. Shkil'. “Razrabotka algoritma postroeniya izolinii po rasschitannym dannym na sfericheskoy poverkhnosti.” *T-Comm* 11.5 (2017): 21–25.
10. Wang, W., L. Zhou, A-X. Zhu and G. Lv. “Isoline extraction based on a global hexagonal grid.” *Cartography and Geographic Information Science* 52.3 (2025): 299–313. DOI: 10.1080/15230406.2024.2359709.
11. Smith, W. H. F., and P. Wessel. “Gridding with Continuous Curvature Splines in Tension.” *Geophysics* 55.3 (1990): 293–305. DOI: 10.1190/1.1442837.
12. Yuyukin, I. V. “Spline model of gridded data operation as a principle of electronic mapping seabed topography.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 14.5 (2022): 656–675. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-5-656-675.
13. Costan, Alexandru. “Grid Data Handling.” *Computational and Data Grids: Principles, Applications and Design*. Hershey: Information Science Reference, 2012. 112–139. DOI: 10.4018/978-1-61350-113-9.ch005.
14. Souri, Amir H., Kelly Chance, Kong Sun, Xiong Liu, and Matthew S. Johnson. “Dealing with spatial heterogeneity in pointwise-to-gridded- data comparisons.” *Atmospheric Measurement Techniques* 15.1 (2022): 41–59. DOI: 10.5194/amt-15-41-2022.
15. Yuyukin, I. V. “Cubic splines synthesis of a distorted isoline in the aspect of using differential mode of satellite navigation.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 13.3 (2021): 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
16. Kvasov, B. and T-W. Kim. “Weighted cubic and biharmonic splines.” *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 57.1 (2017): 26–44.
17. Taheri, A. H. and K. Suresh. “Adaptive w-refinement: A new paradigm in isogeometric analysis.” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 368 (2020): 113180. DOI: 10.1016/j.cma.2020.113180.
18. Schoenberg, I. J. “Contribution to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions.” *Quarterly of Applied Mathematics* 4.1 (1946): 45–99. DOI: 10.1090/qam/15914.
19. Yuyukin, I. V. “Generalization of the underwater relief image using the spline approximation method on a vector electronic chart.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 16.6 (2024): 910–934. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-6-910-934.

20. Yuyukin, I. V. “Spline interpolation of navigational isolines.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
21. Volkov, Yu. S. and V. V. Bogdanov. “On error estimates of local approximation by splines.” *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal* 61.5 (2020): 1001–1008. DOI: 10.33048/smzh.2020.61.503.
22. Wang, H., C-G. Zhu and C-Y. Li. “Construction of B-spline surface from cubic B-spline asymptotic quadrilateral.” *Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing* 11.4 (2017): JAMDSM0044. DOI: 10.1299/jamdsm.2017jamdsm0044.
23. Vorob’eva, G. R. and E. F. Farvaev. “On the issue of constructing spatial isolines for irregular monitoring networks.” *Information Technologies* 30.10 (2024): 544–552. DOI: 10.17587/it.30.544-552.
24. Yuyukin, I. V. “Search for errors in the base of navigation data by the method of spline isosurface visualization.” *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S. O. Makarova* 12.3 (2020): 481–491. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-3-481-491.
25. Morrison J. L. “Cartography of the new millennium.” *Geodesy and cartography* 12.3 (1996): 45–48.
26. Loukili, Y., Y. Lakhrissi and S. E. B. Ali. “Geospatial big data platforms: A comprehensive review.” *KN—Journal of Cartography and Geographic Information* 72.4 (2022): 293–308. DOI: 10.1007/s42489-022-00121-7.
27. Andrienko, N. and G. Andrienko. “Geovisualization: past, present, and future.” *International Journal of Cartography* 11.2 (2025): 224–234. DOI: 10.1080/23729333.2025.2475410.
28. Li, Z. “Geospatial Big Data Handling with High Performance Computing: Current Approaches and Future Directions.” *High Performance Computing for Geospatial Applications* Springer International Publishing, 2020: 53–76. DOI: 10.1007/978-3-030-47998-5_4.
29. Robinson, A. C., C. R. Sluter, et al. “Geospatial big data and cartography: research challenges and opportunities for making maps that matter.” *International Journal of Cartography* 3.sup1 (2017): 32–60. DOI: 10.1080/23729333.2016.1278151.
30. Jamil, D., M. A. Mondal, et al. “Exploring Geospatial Mapping through Speech Commands.” *2025 International Conference on Computer, Electrical & Communication Engineering (ICCECE)2025*: 1–7. DOI: 10.1109/ICCECE61355.2025.10940999.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: uukiniv@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: uukiniv@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 20 мая 2025 г.
Received: May 20, 2025.