

DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-3-421-443

REALIZATION OF THE SMOOTHNESS OF SPLINE TRAJECTORY CONFIGURATION FOR AVOIDANCE OF NO-GO AREAS IN DUE TIME

I. V. Yuyukin

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The configuration of the spline trajectory with the integration of the sleekness criterion into the optimization of the path when moving a marine mobile object in a given direction, taking into account restrictive navigational obstacles, is considered. The smoothness of the trajectory is investigated as the use of the possibility of avoidance of no-go area due to the organization of variable flexibility of the spline structure as the realization of the possibility of rapid dynamic redevelopment in case of unavailability of the initially chosen path. The understanding of intelligent path planning as effective routing is argued with the strategic compliance of the condition for the fastest possible achievement of the goal of the shortest movement in a conflict navigation environment. The phenomenon of cubic B-spline approximation is substantiated as a rational means of synthesizing a path line, since the planned trajectory can be generated in a segmented manner for different variations of the curvature of an algebraic curve based on a balanced combination of isogeometric constraints with optimal arrangement of nodes. The variable generation of the spline shape is performed by coordinating grid points with finite functions while interactive implementing the smoothing effect. It is concluded that heuristic variation of smoothing parameters makes it possible to obtain B-splines of various geometric evolution with the possibility of transforming the multi-link structure of the ship motion line without the need to form a fundamentally new route. The hypothesis of spline structures stability due to the piecewise architecture of the spline, when local violations of mathematical composition do not critically affect the overall task of modeling the trajectory configuration is put forward. The expediency of using variable simulation of a maneuverable trajectory in real time for path planning due to the operational bending of cubic B-splines in order to avoid any collisions is noted. As a demonstration of the practical applicability of constructing the optimal configuration of the spline trajectory, two different variants of the spline route in real time are designed in the form of sequential computer screenshots. The issue of providing automated route formation with synchronous representation of geometric computer support of a safe way line to the watch assistant, stimulating the possibility of intellectual assistance to the navigator in using the strategy of instantaneous adoption of an agreed decision on ship management by providing situational awareness, is actualized. The developed algorithm has been tested as a harmonized support for the navigation staff in the organization of effective routing. A hypothetical use of a planned approach for calculating the trajectory of a marine autonomous surface vessel in order to practically form the concept of unmanned navigation is proposed.

Keywords: spline trajectory, no-go area, intelligent path planning, conflict navigation environment, B-spline approximation.

For citation:

Yuyukin, Igor V. "Realization of the smoothness of spline trajectory configuration for avoidance of no-go areas in due time." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 16.3 (2024): 421–443. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-3-421-443.

УДК 656.61.052

РЕАЛИЗАЦИЯ ПЛАВНОСТИ КОНФИГУРАЦИИ СПЛАЙН-ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СВОЕВРЕМЕННОГО УКЛОНЕНИЯ ОТ ЗАПРЕТНЫХ РАЙОНОВ ПЛАВАНИЯ

И. В. Ююкин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассмотрено конфигурирование сплайн-траектории с интеграцией критерия гладкости в оптимизацию пути при следовании морского подвижного объекта в заданном направлении с учетом ограничительных

навигационных препятствий. Плавность траектории исследована в качестве использования возможности уклонения от запретного района плавания за счет организации вариативной гибкости сплайновой конструкции в качестве реализации возможности быстрой динамической перепланировки в случае недоступности изначально выбранного пути. Аргументировано понимание интеллектуального планирования пути как эффективной маршрутизации при стратегическом соблюдении условия максимально быстрого достижения цели кратчайшего перемещения в конфликтной навигационной среде. Обоснован феномен кубической В-сплайновой аппроксимации как рациональное средство синтеза линии пути, поскольку планируемая траектория может быть сгенерирована сегментированным образом для разных вариаций кривизны алгебраической кривой на основе сбалансированного сочетания изогеометрических ограничений при оптимальной расстановке узлов. Изменчивое генерирование сплайновой формы выполнено путем координирования сеточных точек с финитными функциями при интерактивной реализации эффекта сглаживания. Сделан вывод о том, что эвристическое варьирование параметров сглаживания позволяет получать В-сплайны различной геометрической эволюции с возможностью трансформации многозвенной структуры линии движения судна без необходимости формирования принципиально нового маршрута. Ввиду кусочной архитектуры сплайна выдвинута гипотеза устойчивости сплайновых конструкций, когда локальные нарушения математической композиции критически не отражаются на общей задаче моделирования траекторной конфигурации. Отмечается целесообразность применения вариативного моделирования маневренной траектории в режиме реального времени для планирования пути за счет оперативного изгибания кубических В-сплайнов во избежание любых столкновений. В качестве демонстрации практической применимости построения оптимальной конфигурации сплайн-траектории спроектированы в виде последовательных компьютерных скриншотов два различных варианта сплайнового маршрута в режиме реального времени. Актуализирован вопрос обеспечения автоматизированного формирования маршрута с синхронным представлением геометрического компьютерного сопровождения безопасной линии пути вахтенному помощнику, стимулирующему возможность интеллектуальной помощи штурману в использовании стратегии мгновенного принятия согласованного решения по управлению судном за счет обеспечения ситуационной осведомленности. Разработанный алгоритм апробирован в качестве гармонизированной поддержки судоводительскому составу при организации эффективной маршрутизации. Предложено гипотетическое использование сплайнового подхода для расчета траектории морского автономного надводного судна с целью практического формирования концепции безэкипажного судходства.

Ключевые слова: сплайн-траектория, запретный район плавания, интеллектуальное планирование пути, конфликтная навигационная среда, В-сплайновая аппроксимация.

Для цитирования:

Ююкин И. В. Реализация плавности конфигурации сплайн-траектории для своевременного уклонения от запретных районов плавания / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2024. — Т. 16. — № 3. — С. 421–443. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-3-421-443.

Введение (Introduction)

Успешное решение задач безопасности традиционного и автономного судовождения зависит от умения судоводителей выбирать эффективную стратегию планирования маршрута как поиск оптимальной траектории на основе новых интеллектуальных технологий навигационных систем при широком спектре современного контроля движения судна относительно навигационных опасностей [1]. Одновременно с организацией процесса навигации фактически осуществляется задача информативной маршрутизации как выбор наилучшей траектории при следовании морского подвижного объекта в заданном направлении с учетом ограничительных препятствий. Эффективная математическая формализация программных траекторий в системах управления автономными судами позволяет судоводителю и дистанционному управляющему решать задачи обработки навигационной информации в стесненных районах плавания на новом качественном уровне совместно с традиционными лоцманскими методами [2]. Композиция эффективного маршрута в аспекте электронного подъема карты формирует основу интеллектуальной навигации. Под интеллектуальным планированием пути понимается задача многофакторного анализа безопасного перехода логистической единицы из некоторого исходного состояния в целевое конечное посредством высокоточного фиксирования координат. В морской индустрии прослеживается аналогия данного подхода в реализации необходимости безопасного следования судна из порта отхода

в порт прихода в рамках актуальной концепции штурманской проработки перехода морем. Со стратегических позиций планирования траектории по методу дорожной карты формируется стратегический геометрический путь, проходящий через контрольные точки с учетом тактической возможности своевременного уклонения от навигационных опасностей на любом участке маршрута. Автоматическое планирование маршрута рассматривается как фундаментальная функция автономной навигации мобильного транспортного средства между начальной и целевой путевыми точками без столкновений с навигационными препятствиями.

В ходе практической реализации исследования сформулированы следующие задачи:

1. Алгоритмическое обеспечение задачи построения гибкой конфигурации сплайн-траектории с целью реализации феномена математической плавности как основного критерия оптимизации.
2. Использование точности аппроксимации в качестве вторичного фактора оптимизации как регулятора конфигурации сплайновой линии движения судна с учетом эффекта сглаживания.
3. Апробирование алгоритма моделирования навигационной траектории базисными сплайнами для оптимальной маршрутизации с дополнительной целью реализации возможности безопасного уклонения от запретных районов плавания за счет гибкого оперирования формой аппроксиматора.
4. Адаптация высокоскоростного алгоритма кусочной аппроксимации для синтеза вариативной гибкости модификации сплайн-траектории.
5. Программная реализация для бортового компьютера сплайн-алгоритма при интерактивной маршрутизации в режиме реального времени.
6. Геометрическая интерпретация моделирования навигационной траектории на основе графических средств компьютерной визуализации.
7. Рассмотрение возможности практического применения разработанного прикладного программного обеспечения для организации плавания морских автономных надводных судов по оптимальным сплайновым траекториям как инновационной перспективы удаленного управления активным флотом.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Оптимизация траектории рассматривается как реализация возможности избежания опасных навигационных зон за счет организации вариативной гибкости сплайновой конструкции при стратегическом соблюдении условия оптимального достижения цели кратчайшего перемещения в конфликтной среде. Аналогичным образом данный подход согласуется с классической проблематикой проработки морского перехода при традиционной мотивации уклонения от многочисленных препятствий. При перемещении из начальной точки в точку назначения можно двигаться по разным траекториям, но представляется логичным отдать предпочтение наиболее выгодной из них. Перспективность альтернативной навигации определяется с учетом информативности навигационного поля как экстремальной области целевой задачи судовождения на основе выстраивания карты навигационного поля с одновременной геолокацией. Информативность навигационного поля может быть представлена максимально наглядным образом в виде векторной электронной карты с учетом визуализации концепции «слоеной информации» [3].

Прерогатива альтернативной навигации автономно следующего по маршруту судна понимается как высокоточное определение местоположения с ориентацией на бортовую картографическую информацию в сравнении с фактическим фрагментом определенного геофизического поля, зафиксированного посредством специальной измерительной аппаратуры. Оперативное картографирование позволяет заблаговременно выделить безопасные для целей маршрутизации области навигационного поля. Современный метод комплексирования измерительных данных с нескольких бортовых датчиков позволяет получить более надежную и точную информацию для одновременного картографирования и локализации позиционирования в целях результативности автономной навигации [4]. Применение картографированной информативности реализуется

при наличии на борту виртуального носителя эталонной карты зоны коррекции навигационного поля. Измерительный датчик сканирует фрагмент поля в виде последовательности отсчетов физических параметров с определенной дискретностью вдоль исполнительной траектории.

Задача метода коррекции в конечном итоге состоит в том, чтобы методом «привязки» измеренного фрагмента поля к эталонной карте постоянно фиксировать географические координаты судна [5]. Уточнение измерений выполняется методом поиска максимального или минимального экстремума функционала корреляции измеренного фрагмента с эталоном, полученным из информативности карты навигационного поля для безусловного подтверждения гипотезы совпадения данных навигационных параметров.

Выбор предварительной траектории напрямую связан с анализом навигационной информативности. Последняя однозначно определяет меру эффективности использования изотропного навигационного поля для наискорейшего вычисления координат морского подвижного объекта с учетом априорной и апостериорной информации об особенностях его движения [6]. Обеспечение стабильности маршрута абсолютно коррелируется с физической реализуемостью точности удержания судна на заданном маршруте, что является важнейшим фактором адаптивного управления в современном судовождении [7]. Основой для построения «гладкого» пути является не маршрут как таковой, а прогностический «коридор» точности следования судна с учетом действия течения и ветро-волновых возмущающих факторов при возможности максимальной удаленности траектории как центральной линии пути от навигационных препятствий. Фиксированный «коридор» для морского подвижного объекта определяет взаимозависимое множество факторов безопасности, при соблюдении которых непрерывная траектория, соединяющая заданные начальную и конечную точки маршрута, является кратчайшей [8]. Характеристика оптимальной по «гладкости» траектории фокусируется на обязательном прохождении объекта водного транспорта внутри заданного «коридора» точности плавания в многопараметрической среде множества навигационных опасностей. Аналогично в электронной навигации при подъеме карты формируется маршрут перехода в коридоре безопасности с тактическими границами дистанции бокового отклонения как величины допустимого смещения судна в перпендикулярном направлении от запланированной линии пути. В качестве возможного маршрутного «коридора» может быть эффективно использована сегментированная математическая конструкция многообразия возможных конфигураций сглаживающих *B*-сплайнов.

Субъективность оценки оптимальности планируемого судоводителем маршрута при традиционных методах его формирования не позволяет в полной мере выполнить качественную обработку необходимой информации. Ключевая задача навигации по планированию и автоматическому построению программного движения судна требует применения новых математических подходов решения [7]. Актуальным является рассмотрение иных вариантов алгебраических кривых, позволяющих аналитически задавать физически реализуемые программные траектории в целях повышения безопасности как традиционного, так и автономного судовождения [2]. Подход с позиций *B*-сплайнового метода позволяет нивелировать консервативность задачи планирования пути судна. В качестве нового способа представляется целесообразным организовать генерирование безопасного пути на основе алгоритма кубических сплайнов, позволяющего избежать избыточной сложности кусочных аппроксимаций и одновременно в полном объеме сконфигурировать тщательное планирование маршрута следования подвижного объекта [9]. Линия оптимального пути с позиций *теории аппроксимации* должна быть «гладкой» кривой, что означает успешность дифференцируемости навигационной функции в точках непрерывности производной [10]. Гладкая «склейка» последовательных сплайновых групп обеспечивается заданием алгоритмических условий непрерывности производных аппроксимированной навигационной функции в местах стыковки кусочных фрагментов. Эффективный способ устранения осцилляций синтезированной траектории заключается в геометрическом построении составного многозвенника, в котором кусочные полиномы третьей степени последовательно применяются для организации функциональных групп на сетке контрольных точек. Полученная в результате кусочно-полиномиальная функция

в идеальном варианте будет непрерывной, но в общем случае может иметь разрывы определенных производных в точках соединения сплайновых сегментов.

Для решения задачи качественной маршрутизации представляется разумным применить аппроксимирующую функцию, так как расчеты показывают, что использование сплайна снижает погрешность навигации на 15–20 % по сравнению с альтернативными математическими методами [11]. Результаты исследований подтверждают, что методы моделирования траекторий с минимальным изменением кривизны на основе B -сплайнов дают линии пути, по которым фактически можно передвигаться быстрее в среднем на 32 % по сравнению с используемыми в настоящее время традиционными подходами [12].

В рамках стратегии интеллектуального планирования перехода самостоятельную актуальность приобретает решение проблемы моделирования оптимальной траектории методами кубических B -сплайнов как практической реализации тактики безопасного движения мобильного объекта в конфликтной среде [13]. Наилучшее с позиций навигации непосредственное планирование траектории может быть реализовано эффективным способом на основе интеграционной технологии B -сплайнов. Изменчивое генерирование формы алгебраической кривой выполняется путем координирования характеристических точек с финитными функциями B -сплайна [14].

Требование точности приближения B -сплайновой изолинии к предварительной траектории действует в качестве дополнительного регулятора как аналог полиномиальных энергий упругого сжатия для реализации задачи оптимизации траектории в физическом понимании. Численные расчеты на достаточно трудном тесте, подобном известному примеру Рунге, показали, что гарантированно обеспечивается высокая точность аппроксимации в ситуации применения базисных сплайнов. Для B -сплайна действительно хорошей оказалась обусловленность минимального влияния ошибок округления при достижимой суммарной погрешности аппроксимации 10^{-7} любой измерительной величины, что убедительно показывает преимущество приближения финитными функциями [15]. На основе результатов авторского вычислительного эксперимента получена аналогичная точность расчета кубическими B -сплайнами в числовом диапазоне $10^{-6} \dots 10^{-8}$ погрешности навигационного параметра [16]. Предлагаемый метод кубической B -сплайновой аппроксимации задает меньшие экстремумы кривизны алгебраической кривой при ее аналогичной дифференциальной непрерывности, что концептуально обеспечивает *сглаживающий эффект* [17]. Сбалансированное сочетание изогеометрических ограничений при оптимальной расстановке фиксированных узловых точек по схеме Марсдена для получения приемлемой точности аппроксимации позволяет избежать математически вырожденных результатов.

Геометрическое преимущество траектории, построенной при помощи B -сплайнов третьей степени, заключается в том, что фиктивное изменение одной из характеристических точек изолинии вызовет изменение только четырех последовательных соседних сегментов кривой. Данный факт локальности означает тактическую возможность корректировки общей формы траектории без стратегической перестройки всей линии пути. При этом необходимо учитывать, что базисный сплайн, по сути, представляет собой математическую абстракцию по отношению к оригинальной линии равных значений навигационных параметров. Финитный кубический сплайн, синтезирующий по дискретным данным в каждом элементе сплайнового набора искусственную конструкцию маршрутизации, не является непосредственно фактическим фрагментом аппроксимируемой кривой, но при этом формирует максимально близкую к реальности навигационную траекторию. Как оптимальный аппроксиматор B -сплайн обеспечивает последовательное соединение фрагментарных носителей без резких функциональных изменений и разрывов, что формирует приемлемую «склеенную» сплайн-траекторию в навигационном пространстве запланированного пути. Базисные сплайн-функции позволяют алгоритмически эффективно выполнить трансформацию многозвенной структуры линии движения судна без кардинальной переконфигурации всего маршрута. Главная причина устойчивости сплайновых конструкций заключается в кусочной математической архитектуре сплайна, когда локальные фальшивые нарушения математической композиции критически не отражаются на общей задаче моделирования траектории.

Результаты (Results)

Методы, основанные на сплайн-функциях, могут играть важную роль при стратегическом и тактическом планировании маршрута. Подход с позиций прогрессивной математики характеризуется практичностью реализации траектории с учетом локальных минимумов навигационной функции при тщательном анализе информативности геофизического поля как потенциальной среды альтернативного позиционирования. В классическом подходе к глобальному планированию линии движения автономного надводного средства используются полные априорные сведения о степени конфликтности окружающей среды в аспекте навигации: начальная и конечная позиции, целевая ориентация в конфигурационном пространстве и набор запретных районов плавания с полной информацией о каждом навигационном препятствии в виде геометрической контурной формы, местоположения и вероятной степени опасности. При интеллектуальном подходе операция планирования маршрута становится виртуальной, поскольку полная информация об окружающей среде доступна при выполнении электронного подъема карты. Это позволяет оптимизировать математическое решение с учетом различных критериев, чтобы получить эффективный путь следования судна относительно ограничительных препятствий.

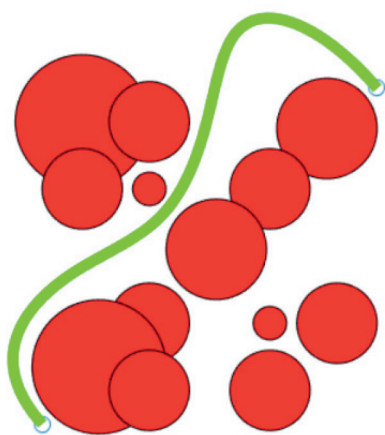
В алгоритме моделирования оптимального сплайн-пути следует учитывать апостериорную способность аппроксиматора генерировать траекторию без навигационных столкновений с препятствиями в режиме реального времени. В ситуации с элементами искусственности предварительной прокладки судоводитель может изначально не обладать полными знаниями о конфликтности окружающей среды, что впоследствии, безусловно, спровоцирует несовпадение предварительной и исполнительной прокладок. Подход к планированию траектории на основе использования концепции информативности навигационного поля, в которой навигационные препятствия представлены отталкивающими окружностями, представляется, безусловно, перспективным. Алгоритм планирования траектории на основе сплайна позволяет обеспечить стратегическую минимизацию длины пути, его плавности с учетом многофакторности критериев безопасности за счет возможности быстрого динамического переконфигурирования геометрии маршрута в случае, если изначально автономный выбранный путь становится нецелесообразным.

Прагматичный алгоритм традиционно рассматривает стандартную маршрутизацию судна в двумерном конфигурационном варианте, где навигационные препятствия представлены в виде конечной группы пересекающихся окружностей разного размера. Гипотеза, предполагающая геометрическое представление набора ограничений, основана на утверждении, что форма любого произвольного статического препятствия может быть в большинстве ситуаций практически аппроксимирована конечным набором окружностей с различными радиусами.

После получения в графическом представлении полной информации о конфликтности среды, а также начальной и целевой позициях маршрута можно выбрать путь, свободный от столкновений с опасностями в виде контуров окружностей разного размера, который оптимизируется вариативностью «гладкости» применяемой сплайн-функции с признаком успешной дифференцируемости аналитического функционала. При этом предполагается вероятностное существование некоторого минимального расстояния между различными препятствиями, обеспечивающего безопасный проход мобильного подвижного объекта. Графическая реализация подхода оптимизации к сплайн-траектории автономной навигации в конфликтной среде навигационных препятствий окружающей среды в качестве входных данных в плоскостном варианте приведена на рис. 1 [18].

Оригинальный метод, основанный на сплайн-функциях, позволяет получить «гладкую» траекторию без столкновений с препятствиями для любой сложности навигационной среды, если каждую опасность условно обозначить отдельным кругом при неукоснительном выполнении логического условия существования препятствий для определения допустимого кратчайшего сближения, позволяющего обеспечить поиск «коридора» безопасности для движущегося по траектории судна. Навигационное препятствие любой степени опасности может быть априорно зафиксировано конечным набором окружностей. Различная степень опасности навигационных препятствий

аппроксимируется диаметром круга запретного района плавания. Радиус круга является аналогом веса навигационного препятствия с целью реализации максимальной вероятности заблаговременного уклонения от уязвимой зоны за счет отталкивающей геометрии контура опасности. На рис. 1 представлена возможная ситуация распределения физических препятствий, сконцентрированных внутри каждой окружности группового набора навигационных ограничений различной степени опасности. На электронной карте покрывающие запретные зоны окружности с текстурно-цветовой заливкой периметра можно оперативно обозначить при использовании редактора ручной корректуры с учетом средней квадратической погрешности (СКП) навигационной функции. Расчет СКП рассчитывается по классической формуле математических основ судовождения как квадратный корень из суммы квадратов СКП навигационных параметров в произведении с частными производными функциональных аргументов. Совместное действие случайной и систематической погрешностей измерений интерпретируется как дополнительное приращение навигационной функции.



*Рис. 1. Оптимизация вариативной сплайн-траектории
для реализации своевременного уклонения от навигационных препятствий*
*Fig. 1. Optimization of a variable spline trajectory
to avoid the navigation obstacles in due time*

В физической интерпретации сплайновый алгоритм планирования пути синхронизируется с методом потенциального поля. В данном подходе со стороны целевой точки маршрута на судна условно действуют силы притяжения, а со стороны навигационных препятствий — силы отталкивания. Предполагается, что морской подвижный объект движется по линии градиента в направлении минимума потенциального поля. Для обеспечения траектории, свободной от столкновений, применение окружности запретного района необходимо рассматривать как функцию потенциала отталкивания с высоким значением внутри препятствия и небольшим значением в пределах контурной границы кругового периметра. Таким образом, при оптимизации пути высокое значение потенциальной функции в центре препятствия «выталкивает» все точки маршрута из него при параллельном выполнении условия минимизирования общей длины морского перехода. Потенциальное поле начинает резко меняться на границе препятствия, продолжая уменьшаться с расстоянием, когда маршрутная точка удаляется от границы запретного района плавания, и быстро обращается в ноль в непосредственной близости от препятствия, что в физическом смысле организует так называемый *локальный минимум навигационного поля*. Поскольку потенциальная функция отталкивания от препятствия быстро уменьшается по мере удаления от контура препятствия, можно пренебречь условной вероятностью «торможения» мобильного объекта в локальном минимуме потенциального поля в смысле потери минимально допустимого расстояния между навигационными препятствиями, что может обеспечить безопасный «коридор» для движения судна по запрограммированной траектории.

В ситуации вероятности сближения с препятствием на дистанцию, сопоставимую троекратному значению СКП, используется метод рационального решения обхода навигационного препятствия с противоположной стороны. Предполагается вводить цветовую палитру для каждого одиночного круга как степени соответствия опасности уязвимого района плавания в потенциальном поле навигационной среды. Так, например, красный цвет обычно ассоциируется с высоким риском опасности следования судна в недопустимой близости контурного круга запретного района (см. рис. 1) при апостериорной оценке точности местоположения в минимальном расстоянии пути от препятствий с учетом СКП как фактической реализации затратной функции. Зеленый цвет траектории символизирует безопасность маршрута. Процедура оптимизации распространяется только на те точки траектории, которые определяют ее сплайн за счет реализации феномена плавности, в то время как при учете фактора минимизации пути учитываются абсолютно все точки маршрута. Интеллектуальный сплайн, формирующий траекторию, оперативно перестраивается на каждой итерации с использованием апостериорной информации об увеличении степени риска запланированной маршрутизации.

Процесс алгоритмизации завершается, если количество итераций превышает заданный пользователем предел или если новая итерация не улучшает предыдущую. Экспериментальное сравнение на основе нескольких тысяч тестов показало, что комбинированный сплайновый алгоритм оптимизации пути требует в среднем на 10 % меньше итераций, чем любой альтернативный математический подход при гарантированной успешности нахождения оптимального маршрута в восемнадцати различных моделируемых средах [18]. Для получения окончательного пути может потребоваться максимально девять минут в сложном варианте маршрутизации [18]. Локальная перепланировка маршрута может быть сокращена по времени за счет финального подбора оптимальной конфигурации сплайн-функции. При этом время вычислений в минутах на каждую сплайновую итерацию не препятствует безопасности применения алгоритма на водном транспорте в силу инерционной специфики маневренности судна и традиционной заблаговременности поступления информации об изменениях навигационной обстановки.

При использовании интеллектуального сплайна с интеграцией критерия «гладкости» в оптимизацию пути становится возможным синтезировать траекторию так, чтобы избежать локальных осцилляций и в полной мере соответствовать соблюдению стандартов безопасности судоходства. В ситуации обнаружения вахтенным помощником на маршруте новых препятствий выполняется мгновенное тактическое перестроение форматированной траектории за счет эмпирических методов моделирования геометрической конструкции сплайн-функций с целью моментального обхода стационарных и динамических препятствий [14].

По итогам выбора свободного от препятствий маршрута выполняется интерактивный подбор сглаживающих коэффициентов для улучшения результирующего пути за счет обеспечения плавности траектории. Результаты экспериментов, проведенных в Санкт-Петербургском институте информатики и автоматизации, показали, что сглаживание траектории снижает ее кривизну в пределах 24–42 % [19]. Феномен обусловлен тем, что сглаженная кривая характеризуется значительными изгибами, что снижает ее общую кривизну при достижении эффекта плавности. Сглаживание компенсирует кривизну траектории на критических участках маршрута для плавного формирования линии пути с целью достижения маневренности в поворотных точках.

Кубические B-сплайны являются рациональным средством для сглаживания линии пути, так как планируемая траектория может быть сгенерирована многосегментным образом для разных вариаций кривизны при любой неблагоприятной конфигурации препятствий [20]. Методы на основе базисных сплайнов являются перспективным инструментом для построения локальных траекторий за счет манипулирования как позициями характеристических точек, так и их весовыми параметрами для создания оптимальной схемы восстановления программируемой линии движения судна. Использование сплайновых кривых является эффективным способом сглаживания благодаря четким геометрическим интерпретациям и математической стабильности при моделировании оптимальной траектории [21].

Прерогативой пользователя является задание сглаживающих коэффициентов в интерактивном режиме, что дает возможность оперативного построения B -сплайна, достаточно точно синтезирующего выпуклую оболочку коридора маршрутной точности плавания. Варьирование параметров сглаживания позволяет получать сплайны различной геометрической эволюции. Базовые функции кубического сплайна для реализации плавной конфигурации формы моделируемой кривой алгоритмически подлежат регулировке на основе изменения значения коэффициентов весовых параметров [22]. Оптимальный подбор управляющего коэффициента в образной метафоре профессора Карл Де Бора представляется *абстрактным виртуальным ключом, после удачного поворота которого можно получить удовлетворительную аппроксимацию данных* [23]. Интерактивный подход позволяет оптимальным образом практически решить *проблему сглаживания* в реализации компромисса двух противоречивых требований точности и «гладкости» при обоюдной важности необходимых условий успешной аппроксимации для компенсации сплайновых осцилляций. Наибольшую эффективность аппроксимации показывает архитектура кубических сплайновых конструкций с учетом параметра сглаживания для гибкого моделирования формы алгебраических кривых [24]. При различных значениях весовых коэффициентов кривая приближается к оригинальной траектории или отодвигается от нее со стратегическим плавным соединением кусочных сегментов, исключая возможность разрывов производных в позициях сплайновой «склейки». Локальная конфигурация формы кривой может быть достигнута путем введения дополнительных весовых коэффициентов в математический базис.

Классическая безопасная эксплуатация судна требует тщательного планирования траектории движения для обеспечения точного, выполнимого и безопасного перехода от точки к точке в потенциально сложной навигационной среде. Для получения выигрышной аппроксимационной траектории предполагается использовать кусочные полиномы третьей степени. Метод настройки изгиба кубического сплайна с использованием феномена «гладкости» для обхода препятствий позволяет интерактивным образом уточнять траекторию в целях более точного планирования безопасного пути с отклонениями от запретных районов плавания в режиме реального времени в неструктурированной конфликтной среде. Стратегически сплайновая кривая строится, модифицируется и управляется контрольными точками, положение которых можно задать в интерактивном режиме в соответствии с требованиями конкретной навигационной задачи. Изменение позиций маркерных точек приводит к изменению формы кривой, что позволяет пользователю тактически гибко настраивать генезис виртуальной формы генерируемой линии [25].

Характеристики базисных сплайнов обладают набором удобных свойств при планировании траектории движения судна с учетом непрерывности первой производной в кубическом варианте сплайна. Математически кубический сплайн имеет класс «гладкости» C^2 на минимальном компактном носителе. Это означает, что кубический сплайн формализуется кусочно-полиномиальной дважды непрерывно дифференцируемой функцией однократного дефекта «гладкости», составленной из фрагментов кубических многочленов. Непрерывность и «гладкость» сплайновой конструкции гарантированно обеспечивается в точках соединения общей многозвенной композиции. Производные первого и второго порядка кубического сплайна непрерывны. Погрешности в позиции одного отдельного узла не влияют на общую форму аппроксимационной контурной линии благодаря свойству локальности.

Теоретически элементы сплайнового многозвенника могут быть «склеены» между собой в узлах сетки до разной степени «гладкости», начиная с того, что математически допускаются разрывы некоторых производных. Поскольку для оптимальности траектории требуется дифференцируемая функция, исключая точки геометрического разрыва, следует обратиться к кубическим сплайнам как чрезвычайно гибкой конструкции, позволяющей осуществить наилучшие приближения сложных геометрических линий. Концептуально аппроксимирующая сплайн-функция состоит из цепочки полиномов с обязательным условием «склейки» соседних в последовательности полиномов таким образом, чтобы полиномиальные коэффициенты и значения их производных на сеточных «стыках» совпадали для обеспечения реалистичности генезиса плавности

траектории. Для универсальной ситуации применения базисного кубического сплайна фактически используются только четыре соседних полинома в каждой произвольной расчетной точке. Оптимальная траектория синтезируется на основе умножения последовательности «шапочных» функций из фиксированной группы базисных полиномов на расчетные скалярные коэффициенты в каждой произвольной координате. В данной трансформации финитная функция является вторичной по отношению к оригинальной траектории, а непосредственно B -сплайн — исключительным математическим инструментарием для приближения навигационной функции.

Создание плавных траекторий является чрезвычайно важным фактором для достижения стабильного и эффективного движения мобильных объектов. Для исключения проектирования траектории с большим количеством необязательных и резких поворотов необходим процесс последующего сглаживания. Моделирование показывает, что сплайновый подход улучшает качество сглаженной траектории с точки зрения длины и максимальной кривизны траектории [26]. *Сглаживающий сплайн* характеризуется тем, что проходит в некоторой окрестности заданных исходных значений с фиксированной погрешностью измерений навигационных параметров, в отличие от интерполяционного сплайна, строго проходящего через все позиции точно измеренных данных. При решении вопроса о том, какой сплайн формировать, необходимо в первую очередь учитывать погрешности информационных данных.

Практически бесполезным является применение аппроксимационного сплайна, когда экспериментальная информация задана с точностью, сопоставимой с погрешностью представления чисел в двоичной системе счисления компьютерных вычислительных операций. С учетом эволюции теории аппроксимации неизбежно приходится строить *сглаживающий сплайн* в ситуации, когда, согласно условиям формирования оптимальной траектории, на качественные характеристики кусочного многосвязника в «коридоре» ограничений накладываются *граничные условия*. Генерирование маршрута начинается из точки отхода при начальном заданном курсе. Следовательно, новые траектории могут быть инициализированы исходя из текущего положения водного транспортного средства и направления его движения. Поскольку первая производная сплайн-траектории пропорциональна направлению движения судна, наличие непостоянной производной может привести к неосуществимому пути, но поскольку вторая производная пропорциональна углу поворота транспортной единицы, неправильный учет радиуса циркуляции заставят морской подвижной объект тормозиться в каждой путевой точке для регулировки автоматического рулевого управления. При условии создания сплайн-траектории с непрерывными производными появляется гарантия плавного управления на протяжении всего пути.

Математический подход, используемый при создании сплайнов, позволяет эффективно создавать плавные траектории через заданный набор контрольных точек. Оптимальность траектории обеспечивается вводом дополнительных путевых точек вблизи каждого препятствия с перспективой перемещения реперных точек в гарантированную отдаленность от препятствий в свободные зоны навигационной безопасности. За счет перемещения сеточных точек появляется конструктивная возможность гибкого изгибания сформированной алгебраической кривой для безопасного перемещения в конфликтной окружающей среде при использовании ее в качестве превентивного трекинга.

В традиционных обозначениях американского профессора Карл де Бора типичная непрерывная кусочно-полиномиальная функция с неубывающим набором сеточных точек ξ_i в виде действительных чисел для генерации последовательности кусочных кубических многочленов P_i условно может быть представлена наглядным образом так, как, например, показано на рис. 2 [27], где синим цветом обозначена оригинальная сплайновая контурная линия в локальной системе координат как практическая реализация функционального многосвязника сплайн-функций. Каждый полиномиальный многочлен P_i однозначно определяется его скалярными коэффициентами и неразрывностью производных в формате учета степени «гладкости». Варьирование коэффициентами B -сплайна позволяет моделировать аппроксимирующую функцию оптимальным образом. Аналогично кусочно-полиномиальные функции, комбинированные в сегментах «склейки» математическими сред-

ствами в единый многозвенник синего цвета (см. рис. 2), определяются посредством задания конкретной композиции ξ_i декартовых координатных точек.

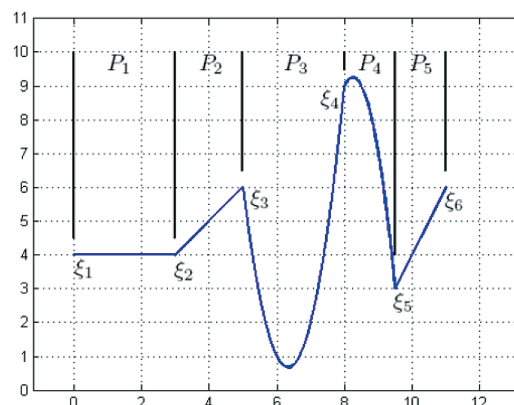


Рис. 2. Демонстрационный многозвенник кусочно-полиномиальной функции
Fig. 2. Demonstrational multilink of a piecewise polynomial function

Собственный опыт применения в программировании кусочных аппроксимаций показывает, что использование кубических конструкций гарантированно обеспечивает экономичное приближение любой навигационной функции при правильном выборе сеточных точек ξ_i на оси вещественных чисел, поскольку *гридированные данные* однозначно определяют интервал определенности сплайн-функций [28]. Всестороннее понимание термина «сплайн» определяет оптимальную достижимость конкретной реализации финитно-базисной архитектуры синего многозвенника как проявление специфической точки зрения на конструирование кусочно-многочленных функций. Так, представленная на рис. 2 сплайн-функция синего цвета, является демонстрационным примером синтезированной траектории, приведенной не для эстетического восприятия, а с целью понимания сути организации моделирования линии пути с позиций подхода кусочных аппроксимаций.

В практических приложениях судовождения имеется уникальная возможность наложения дополнительных ограничений на сплайн-траекторию с целью оперативного управления формой алгебраической кривой. При рассмотрении вопроса манипулирования формой восстанавливаемого кубическим сплайном математического объекта в новой парадигме изометрического анализа допускается практическая возможность изгиба «гладкой» кривой в физическом приложении. Данный геометрический эффект ориентирует исследователя на теоретическую возможность синтеза наиболее сложных изолиний. Для получения оптимальной интерполяции с математической точки зрения практически выгодно использовать кусочные полиномы третьей степени.

Кубический сплайн имеет максимальный класс «гладкости», обеспечивающий наличие обязательной непрерывности производных первого и второго порядка в серии точек «склейки» кусочного конгломерата. Дифференцируемость до вторых производных в точках многозвенового соединения однозначно не создает «гладкости» кубического сплайна в смысле приближения минимума кривизны искусственно созданной алгебраической кривой. С целью получения минимума кривизны или максимума «гладкости» для любой траектории необходимо принципиально обеспечить правильную ориентацию набора контрольных вершин характеристического многоугольника сплайнового базиса. При правильном выборе кубического многочлена с ограничениями сплайна начальной и конечной точек на основе задания первой производной как фиксирование напряжения сплайновой контурной линии гарантировано уникальное решение задачи создания оптимального маршрута судна. В общем случае все математические недостатки можно устранить за счет реалистичного обобщения функционала «шапочных» функций понятием *B*-сплайна.

Сплайн-траектория синтезируется путем умножения последовательности «шапочных» функций $B_i(x)$ на расчетные скалярные коэффициенты c_i как в каждой узловой точке, так и в любой про-

межуточной точке сеточного интервала. Так как компоненты $B_i(x_i)$ финитны, в каждом узле x_i от нуля отличны только активные элементы с номерами $i-1, i, i+1$ (рис. 3). Как показано на этом рисунке,

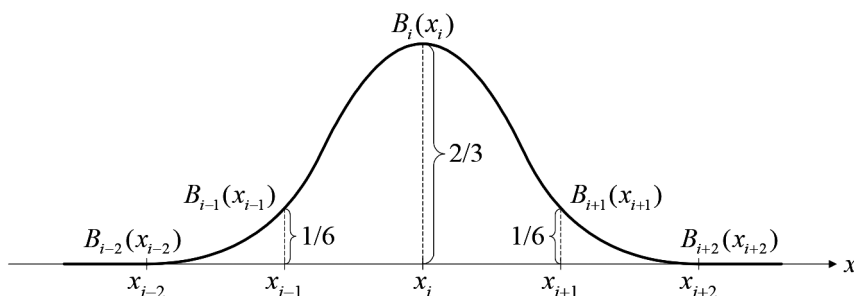


Рис. 3. Финитность базисных функций кубического B-сплайна
Fig. 3. Finiteness of basis functions of a cubic B-spline

финитность математической конструкции означает, что функции B-сплайна практически имеют ненулевые значения только на сеточных интервалах, которые составляют его носитель. Узловые значения $B_i(x_i)$ базисного кубического сплайна на пятиузловом сеточном интервале принимают следующие числовые значения:

$$B_i(x_i) = \frac{2}{3}; B_{i-1}(x_{i-1}) = B_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{1}{6}; B_{i-2}(x_{i-2}) = B_{i+2}(x_{i+2}) = 0.$$

Так как функции $B_i(x_i)$ финитны, в каждом узле x_i от нуля отличны только активные функции с номерами $i-1, i, i+1$ (см. рис. 3). Следовательно, условия интерполяции траектории приобретают конкретную математическую реализацию:

$$c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) = f_i, i = 1, \dots, N \quad (1)$$

где f_i — дискретные сеточные значения навигационной функции $U = f(x, y)$ в локальной системе координат.

При этом в данном случае система (1), составленная из N уравнений, имеет $N+2$ неизвестных c_i . Поэтому для ее замыкания следует добавить граничные условия по первой производной, математически задающие физическую напряженность сплайновой траектории:

$$\left. \begin{aligned} c_0B'_0(x_1) + c_1B'_1(x_1) + c_2B'_2(x_1) &= f'_1; \\ c_{i-1}B_{i-1}(x_i) + c_iB_i(x_i) + c_{i+1}B_{i+1}(x_i) &= f_i, i = 1, \dots, N; \\ c_{N-1}B'_{N-1}(x_N) + c_NB'_N(x_N) + c_{N+1}B'_{N+1}(x_N) &= f'_N. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Исключив c_0 и c_{N+1} из алгебраической системы (2), получим:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{f'_1 - c_1B'_1(x_1) - c_2B'_2(x_1)}{B'_0(x_1)}; \\ c_{N+1} &= \frac{f'_N - c_{N-1}B'_{N-1}(x_N) - c_NB'_N(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Первое и последнее уравнения условий интерполяции приобретают вид:

$$\begin{aligned} c_0B_0(x_1) + c_1B_1(x_1) + c_2B_2(x_1) &= f_1; \\ c_{N-1}B_{N-1}(x_N) + c_NB_N(x_N) + c_{N+1}B_{N+1}(x_N) &= f_N. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив в уравнения (4) вместо коэффициентов c_0 и c_{N+1} их выражения через краевые условия (3), получим:

$$\frac{(f'_1 - c_1 B'_1(x_1) - c_2 B'_2(x_1)) B_0(x_1)}{B'_0(x_1)} + c_1 B_1(x_1) + c_2 B_2(x_1) = f_1; \quad (5)$$

$$c_{N-1} B_{N-1}(x_N) + c_N B_N(x_N) + \frac{(f'_N - c_{N-1} B'_{N-1}(x_N) - c_N B'_N(x_N)) B_{N+1}(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} = f_N.$$

С учетом уравнений (5) в модифицированном виде система уравнений (2) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} c_1 \left[B_1(x_1) - \frac{B'_1(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1) \right] + c_2 \left[B_2(x_1) - \frac{B'_2(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1) \right] &= f_1 - \frac{f'_1(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1); \\ c_{i-1} B_{i-1}(x_i) + c_i B_i(x_i) + c_{i+1} B_{i+1}(x_i) &= f_i, \quad i = 2, \dots, N-1; \\ c_{N-1} \left[B_{N-1}(x_N) - \frac{B'_{N-1}(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N) \right] + c_N \left[B_N(x_N) - \frac{B'_N(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N) \right] &= \\ &= f_N - \frac{f'_N}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Построение базисного кубического сплайна в матричном исчислении формируется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} L_1 & P_1 & 0 & K_1 \\ K_2 & L_2 & P_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & K_{N-1} & L_{N-1} & P_{N-1} \\ P_N & 0 & K_N & L_N \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^* \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ f_N^* \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $K_1 = 0$;

$$L_1 = B_1(x_1) - \frac{B'_1(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$P_1 = B_2(x_1) - \frac{B'_2(x_1)}{B'_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$K_N = B_{N-1}(x_N) - \frac{B'_{N-1}(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$$L_N = B_N(x_N) - \frac{B'_N(x_N)}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N);$$

$$P_N = 0;$$

$$K_i = B_{i-1}(x_i);$$

$$L_i = B_i(x_i);$$

$$P_i = B_{i+1}(x_i);$$

$$f_1^* = f_1 - \frac{f'_1}{B'_0(x_1)} B_0(x_1);$$

$$f_N^* = f_N - \frac{f'_N}{B'_{N+1}(x_N)} B_{N+1}(x_N).$$

Вычисление скалярных коэффициентов кубических сплайнов (6) предполагает решение линейных алгебраических систем. Матрицы таких систем имеют трехдиагональную структуру. Вследствие этого *метод исключения Гаусса* реализуется с использованием более простых формул так называемого *метода прогонки*. В данном случае вначале вычисляются по рекуррентным формулам коэффициенты V_i и W_i при $i = 1, \dots, N$:

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= 0; \\ W_0 &= 0; \\ V_i &= -\frac{P_i}{L_i + K_i V_{i-1}}; \\ W_i &= \frac{f_i - K_i W_{i-1}}{L_i + K_i V_{i-1}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Далее непосредственно вычисляются в обратном порядке неизвестные c_i , начиная с коэффициента c_N :

$$c_i = V_i c_{N+1} + W_i, \quad (9)$$

где индекс i убывает от N до 1, а $c_{N+1} = 0$, так как $c_N = W_N$.

Найденные скалярные сплайновые коэффициенты c_i необходимы для умножения в каждом сеточном узле на базисные компоненты $B_i(x_i)$ с целью реализации процедуры сплайн-интерполяции.

Предлагается оригинальный способ вычисления приближаемой кубическими B -сплайнами навигационной функции для произвольного аргумента $x \in [x_i, x_{i+1}]$. Для этого необходимо использовать только коэффициенты четырех узловых B -сплайнов, указанных на рис. 4 как точки пересечения пунктирной линии.

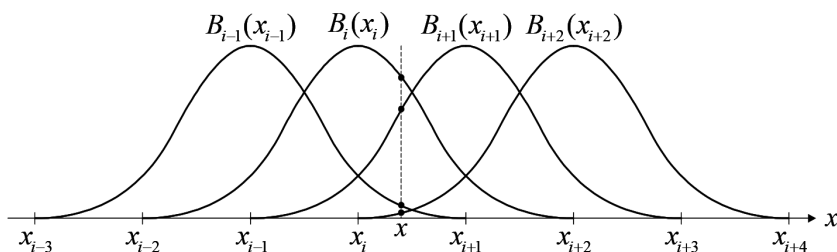


Рис. 4. Вычисление значения B -сплайна для произвольного аргумента навигационной функции
Fig. 4. Calculating the B-spline value for an arbitrary navigation function argument

В силу финитности функций $B_j(x)$, $j = i-1, \dots, i+2$ генерирование навигационной функции в произвольной точке $x \in [x_i, x_{i+1}]$ сеточного интервала (см. рис. 4) выполняется на основе базисной сплайновой композиции:

$$S(x) = c_{i-1} B_{i-1}(x) + c_i B_i(x) + c_{i+1} B_{i+1}(x) + c_{i+2} B_{i+2}(x). \quad (10)$$

Предлагаемым способом для любой произвольной точки $x \in [x_i, x_{i+1}]$ вычисляется значение B -сплайна при использовании только четырех базисных функций (см. рис. 4), что априорно обеспечивает сжатие массива данных в 4 раза. На основе разработанного алгоритма составлен программный паскаль-модуль. Сплайновая альтернатива обеспечивает высокоскоростной расчет траектории за счет логической оптимизации вычислительной формализации базисной аппроксимации.

На скриншоте, представленном как рис. 5 в локальной системе координат, имитируется сложная линия сплайн-пути объекта, отличающаяся гибкостью моделирования, что является, безусловно, важным фактором для морской навигации ввиду предоставления возможности реактивного уклонения от навигационных препятствий. Результат изометрического формирования

траектории достигнут на основе вычислительной реализации кубического B -сплайна с учетом информативности навигационного поля.

В ситуации поступления апостериорной информации о навигационных опасностях синтезированную траекторию, представленную на рис. 5, можно оперативно переконфигурировать в альтернативную с целью уклонения от запретных районов плавания за счет генерирования улучшенного сплайна с повышением степени гибкости.

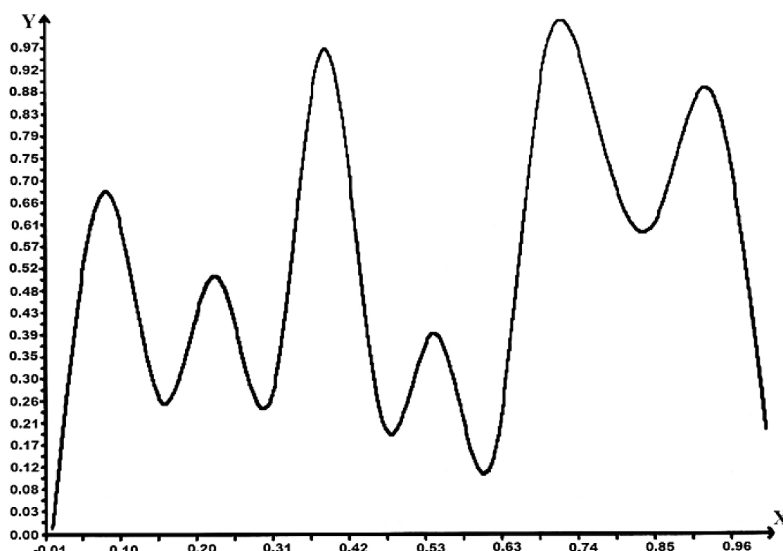


Рис. 5. Геометрическая интерпретация синтезирования навигационной траектории кубическим базисным сплайном

Fig. 5. Geometric interpretation of synthesizing a navigation trajectory using the cubic basis spline

Излишних перестроений конфигурации предварительного маршрута можно в большинстве случаев избежать благодаря изначально разумному выбору исходного кубического B -сплайна. В соответствии с локальным характером кубического B -сплайна его выбор обеспечивает корректность аппроксимации искомой алгебраической кривой и удовлетворение свойствам гладкости, накладываемым в качестве напряженности на сплайновую траекторию.

Локальное свойство финитности (см. рис. 3) потенциально обеспечивает необходимость пересчета минимальной части траектории при изменении, добавлении или удалении узловой точки в массиве сеточных данных, что в положительном смысле выделяет B -сплайн из арсенала средств кусочных аппроксимаций. В ситуации применения альтернативных алгоритмов при добавлении новой контрольной точки или изменении позиции существующей геометрическая конструкция полностью переформатируется при затратном вычислительном ресурсе. При этом только базисными сплайнами естественным образом описывается любая траектория искусственного объекта как с активными, так и с инерционными отрезками движения. B -сплайн в геометрическом представлении формы является составной алгебраической кривой, позволяющей при аппроксимации набора сеточных точек избежать нежелательных осцилляций, характерных для интерполяционных многочленов высокой степени. B -сплайновые траектории не требуют явного задания производных и локальное изменение узлов не приводит к необходимости вычисления всей кривой заново.

Процедура оптимизации стратегически ориентирована на характеристические точки траектории, которые определяют аппроксимирующий ее сплайн. Модернизированный сплайн-путь оперативным образом перестраивается с использованием апостериорной информации без формального увеличения количества сеточных точек сплайна. На рис. 6 в локальной системе координат продемонстрирована модернизированная конфигурация сплайн-траектории, оперативно сформированная при условном фиксировании новых опасных препятствий на предварительном маршруте следования судна, имитированном на рис. 5.

Указанная ранее целесообразность применения вариативного синтезирования базовой маневренной траектории в режиме реального времени позволяет с предельной точностью конкретизировать метод решения задачи оперативного планирования траектории методом изгибания гладких кубических B -сплайнов во избежание столкновений с препятствиями [29]. Сплайн-алгоритм способен итеративно манипулировать построением пути с отклонениями от опасностей в потенциально сложных условиях (см. рис. 6). Предварительный сплайн может быть дополнительно улучшен на локальном уровне при выборе пользователем в интерактивном режиме реалистичных весовых коэффициентов для обеспечения возможности варьирования траектории. Эффективное маневрирование автономным транспортным средством в обход навигационных препятствий имеет решающее значение для возможности обеспечения безопасности судовождения.

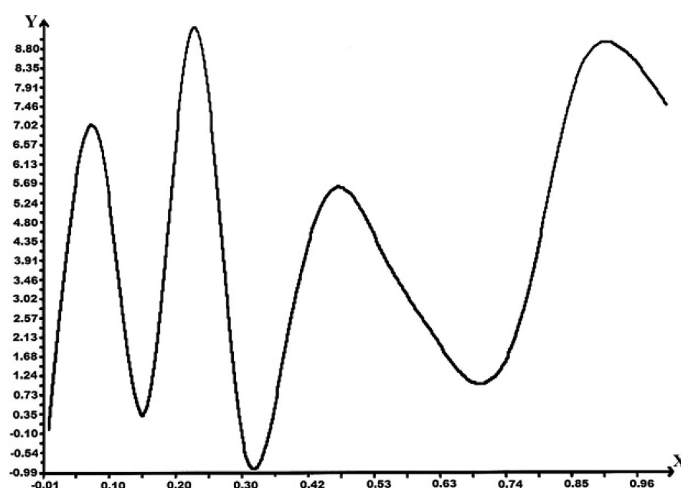


Рис. 6. Альтернативное оперативное моделирование аппроксимации криволинейной траектории кубическим финитным сплайном
Fig. 6. Alternative operational modeling of approximation of a curvilinear trajectory by the cubic finite spline

В данном исследовании допускается алгоритмическая возможность аппроксимации искаженной траектории. Ввиду сложности оперирования искаженными траекториями нестандартные атрибуты математических основ судовождения традиционно были исключены из процесса обработки информации, и задача маршрутизации судна решалась исключительно по тривиальным навигационным правилам без перспективной геометрической оценочной интерпретации. Предлагается пересмотреть стереотипное абстрагирование от искаженной траектории, поскольку методы сплайн-функций позволяют оперировать такими сложными алгебраическими объектами, как разрывные в математическом смысле линии пути.

Сложность практического применения гипотетической искаженной траектории обуславливается наличием вероятного существования внутренних точек разрыва в определенных координатах ξ_i в соответствии с рис. 2. В качестве разрывов допускаются предельные случаи локального математического искажения траектории. Во внутренних точках разрыва навигационная функция условно не определена. Фактически с позиций теории приближения кусочный полином P_i имеет два значения в каждой позиции функционального разрыва, а именно: функциональное значение слева определяется левым сплайновым многочленом, значение функции справа — правым многочленом. Для формальной определенности предлагается выбирать в каждой точке разрыва значение справа, т. е. условно считать, что P_i является непрерывной экстраполированной функцией справа, что дает однозначность программной реализации сплайнового алгоритма. Для преобразования точки разрыва левый и правый кусочный многочлены искусственно «склеиваются» математическим образом в единый конфигурационный многозвенник с организацией унимодальной функции, уменьшающей вариацию. Таким образом, точка разрыва обладает свойством строгого

альтернирования в смысле совпадения по значению с правым многочленом при абстрагировании от фактического существования функциональной неопределенности ввиду формального условия «отсутствия узла» в ситуации существования функционального разрыва в абстрактной сеточной точке ξ_i (см. рис. 2).

Предположение о принципиальной возможности моделирования разрывной траектории является авторской точкой зрения на перспективную вероятность реализации сложного варианта аппроксимации кубическими сплайнами. С математической точки зрения при этом возможно по-прежнему условно считать, что навигационная функция условно имеет два значения в каждой точке разрыва. Однако при кусочно-многочленной аппроксимации для кубического случая теоретически допускается ситуация разрыва одной производной при так называемом *существовании однократного дефекта сплайна*, что позволяет в данном случае игнорировать факт двойственности функциональных значений [30].

При оптимальном выборе узлов наличие функционального разрыва практически не влияет на стратегическое поведение сплайна в геометрическом понимании процесса аппроксимации. Предлагаемый подход позволяет считать искаженную траекторию практически идентичной кубическо-многочленной функции с принципиально возможным применением к синтезированию разрывной траектории в полной мере сплайнового аппарата. Благодаря гипотезе возможности оперирования искаженными траекториями отпадает стратегическая необходимость в применении сложных рутинных математических процедур при анализе определенности аппроксиматора в точке оцениваемого формального разрыва. В соответствии с этим программная реализация разработанных алгоритмов практически не меняется по содержанию, за исключением добавления в паскалевскую подпрограмму эпизодического логического условия приравнивания в точке разрыва искаженной линии пути по функциональности значения справа. Таким образом, кубическая кусочно-многочленная конструкция в прикладной программе условно рассматривается как непрерывная навигационная функция справа, что фактически однозначно создает принципиальную возможность использования в автоматизированном судовождении искаженной траектории как таковой. Теоретически данный подход позволяет сформировать тенденцию оперирования искаженными траекториями в развитие классического метода обработки навигационной информации, а не абстрагироваться от нестандартных ситуаций неоправданной технической детализацией невозможности применения искаженных траекторий в судовождении.

Ввиду алгоритмических затруднений обработки информации при традиционном представлении о математической неформализуемости искаженной траектории данный вопрос ранее не рассматривался в научной литературе с практической точки зрения. Выполненное исследование может принципиально изменить сформировавшуюся шаблонную позицию на основе уточненного геометрического представления интерполяции кубическими базисными сплайнами абстрактной искаженной траектории. В ситуации признания факта уникальной сложности математической формализации искаженной траектории классическим способом решить задачу маршрутизации судна в сложном случае разрыва производной представляется невозможным, в отличие от синтеза искаженных траекторий сплайновыми методами, отождествляемого с реальностью решения математической проблемы с позиций аппарата кусочных аппроксимаций.

Апробированный алгоритм может служить гармонизированной поддержкой для судоводительского состава при организации виртуального маршрута судна. Предлагаемый подход может быть также использован как математическое обеспечение автоматизированной системы судовождения в комбинировании с нейросетевыми технологиями для расчета траектории движения мобильного судна с целью формирования концепции безэкипажного судовождения. Метод *B*-сплайновых аппроксимаций способствует достижению функции предотвращения столкновений морских автономных надводных судов (МАНС) в качестве реализации ключевого выполнимого алгоритма обеспечения высоконадежного инновационного судовождения [31], [32]. Интеллектуальный подход, основанный на принципах прогрессивного математического моделирования, способен генерировать разумную и плавную траекторию как демонстрацию практической возможности разработки

экспертных систем для автономного предотвращения столкновений [33]. Сплайновые алгоритмические инновации в области компьютерной визуализации с графической интерпретацией результатов возможностей, безусловно, важны для развития функционала автоматизированных систем судовождения.

Компьютерная визуализация программированного движения судна на основе применения перспективных возможностей искусственного интеллекта для распознавания целевой обстановки обеспечивает возможность интеллектуальной помощи штурману в стратегии принятия правильного решения при любых обстоятельствах плавания за счет обеспечения ситуационной осведомленности.

Обсуждение (Discussion)

Для максимальной информированности вахтенного помощника о перспективе маршрутизации целесообразно рассматривать модель программированного движения судна сочетанием с реализацией зоны навигационной безопасности при учете характеристик градиентов, ориентированных на информативные области в навигационном поле [7]. Задачу анализа информативности поля логически можно свести к поиску областей с характеристическим «веером» разнонаправленных градиентов различных навигационных параметров [34]. На основе предлагаемого подхода возникает фактическая возможность оперирования комплексом сплайн-градиентов в современном судовождении, что позволяет сделать предположение о практической реалистичности математической сути прогрессивного метода при обработке навигационной информации в соответствии со сплайновой концепцией.

В процессе поиска альтернативной точки зрения на вопросы современного понимания проблем обработки навигационной информации выдвигается гипотеза о допустимости факта ситуационного изменения ориентации вектора градиента в каждой точке навигационной изолинии при условии сохранения значения модуля градиента. Сплайновый алгоритм градиентного типа в развитие допустимого предположения о веерной ориентации определяет исключительную применимость методов сплайн-функций для новой трактовки понятия градиента и формирования принципов практического применения нового подхода в построении навигационных траекторий.

Использование понятия *сплайн-градиента* можно признать основополагающим фактором, определяющим потенциал движения судна при изолинейном плавании с учетом меняющейся геометрической характеристики поля навигационных параметров. Градиент навигационного поля является измеряемым параметром и единственным демаскирующим предикатом при его активном применении для определения максимальной информативности навигационного поля. Сплайн-градиент позволяет эффективно оценивать перемещение аппроксимированной изолинии в окрестности определяемой позиции судна при изменении навигационного параметра, а, следовательно, с применением понятия *сплайн-градиента* оперативно решаются такие важнейшие задачи судовождения, как уточненное определение места судна и апостериорная оценка его точности. Градиент является векторной характеристикой сплайна как аппроксиматора вариативной траектории. Сплайн-градиент является векторной величиной, определяющей направление максимально быстрого увеличения аппроксимированного навигационного параметра и численно равной первой производной восстановленного значения навигационной функции по вероятнейшему градиентному направлению. Сплайн-градиент можно оценивать как фактор, определяющий теоретическую максимальную точность местоположения. Поэтому при анализе архитектуры веера сплайн-градиентов необходимо учитывать факт влияния каждого вектора градиента погрешности измерений навигационного параметра [35]. Для уменьшения погрешности позиционирования необходимо стремиться к оценке точности по разнонаправленному вееру сплайн-градиентов поля навигационных параметров. Для практического применения можно считать, что «веер» сплайн-градиентов обеспечивает реалистичность геометрической интерпретации многофакторности вероятных направлений максимальных увеличений навигационной функции.

При апробировании данного подхода с использованием соответствующего программного обеспечения бортового компьютера в эргономичном варианте в структуре перспективного навигационного автоматизированного комплекса измеряемые параметры изолинии по известным формулам могут быть типовым способом пересчитаны в географические координаты с целью постоянной геолокации любого подвижного объекта в автономном режиме на специализированных электронных средствах мониторинга. Актуальность разработки эффективного метода математического описания новой динамической системы определяет синтез алгоритма инновационного адаптивного управления, обеспечивающего организацию движения МАНС в пространстве настраиваемых параметров в оперативном направлении каждого градиента скорости изменения оценочного функционала позиционирования.

Выводы (Summary)

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. Основным фактором выполнения задачи оптимизации построения гибкой конфигурации сплайн-траектории является реализованный феномен математической плавности.
2. В качестве вторичного регулятора конфигурации сплайновой линии движения судна перспективным является использование финальной точности аппроксимации с учетом эффекта сглаживания.
3. Целесообразность применения алгоритма аппроксимации траектории базисными кубическими сплайнами обоснована предпочтительностью практической реализации задачи своевременного уклонения от запретных районов плавания за счет обеспечения «гладкости» маршрутной кривой.
4. Математическая адаптация высокоскоростного сплайн-алгоритма к формализации задачи оптимизации траектории обеспечивает высокую точность и устойчивость вычислительных процедур.
5. Разработанная программа с пользовательским интерфейсом в среде языка программирования высокого уровня турбо-паскаль адекватно синтезирует оптимальную траекторию любой степени сложности с практической возможностью использования искаженной линии пути в режиме реального времени.
6. Геометрическая интерпретация построения навигационной траектории выполняет наглядную роль графического сопровождения результатов работы паскаль-программы с целью обеспечения ситуационной осведомленности судоводителя.
7. Предполагается принципиальная возможность практического применения сплайн-алгоритма в реализованном программном обеспечении к удаленной организации плавания морских автономных надводных судов по оптимальным траекториям в ходе реализации концепции безэкипажного судходства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васьков А. С. Методы планирования ограждения опасностей для контроля в системах управления движением судна / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Морские интеллектуальные технологии. — 2023. — № 3–1 (61). — С. 110–119. DOI: 10.37220/MIT.2023.61.3.036.
2. Васьков А. С. Планирование и контроль криволинейной траектории движения судна / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 3. — С. 401–415. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-3-401-415.
3. Ююкин И. В. Сплайновое синтезирование картографированного эталона информативности поля в задаче корреляционно-экстремальной навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 1. — С. 25–39. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-1-25-39.
4. Safin R. Modern Methods of Map Construction Using Optical Sensors Fusion / R. Safin, T. Tsoy, R. Lavrenov, I. Afanasyev, E. Magid // The 2023 International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB2023). — Alife Robotics Corporation Ltd, 2023. — Vol. 28. — Pp. 166–169. DOI: 10.5954/ICAROB.2023.OS6-6.

5. Yuyukin I. V. Correlation-extreme method based on spline functions as an alternative to satellite navigation / I. V. Yuyukin // AIP Conference Proceedings. — AIP Publishing, 2023. — Vol. 2476. — No. 1. — Pp. 030030. DOI: 10.1063/5.0102916.
6. Stepanov O. A. Map-Aided Navigation Taking into Account a Priori Information on the Object Trajectory / O. A. Stepanov, Yu. A. Litvinenko, V. A. Vasil'ev, A. M. Isaev // 2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS). — IEEE, 2023. — Pp. 1–6. DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168423.
7. Мироненко А. А. Методология формализации навигационной обстановки, планирования маршрута и программных траекторий движения судна: дис. ... д-ра техн. наук / А. А. Мироненко. — Новороссийск, 2016. — 310 с.
8. Berdyshev V. I. Optimal Object Trajectories under Unfriendly Observation / V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov, A. A. Popov // Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022). — ISDCT SB RAS, 2022. — Pp. 17–18.
9. Лавренов Р. О. Математическое и программное обеспечение решения задачи многокритериального поиска пути мобильного объекта: дис. ... канд. техн. наук / Р. О. Лавренов. — Казань, 2020. — 138 с.
10. Ююкин И. В. Сплайн-интерполяция навигационных изолиний / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 6. — С. 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. Berdyshev V. I. Extremal problems of navigation by geophysical fields / V. I. Berdyshev, V. B. Kostousov // Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications. — 2018. — Vol. 6. — Is. 2. — Pp. 4–18. DOI: 10.32523/2306-6172-2018-6-2-4-18.
12. Berglund T. Planning Smooth and Obstacle-Avoiding B-Spline Paths for Autonomous Mining Vehicles / T. Berglund, A. Brodnik, H. Jonsson, M. Staffanson, I. Soderkvist // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. — 2009. — Vol. 7. — Is. 1. — Pp. 167–172. DOI: 10.1109/TASE.2009.2015886.
13. Ююкин И. В. Оптимальная сплайн-траектория информативного маршрута судна в корреляционно-экстремальной навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 2. — С. 230–247. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-2-230-247.
14. Wang P. Obstacle-Avoidance Path-Planning Algorithm for Autonomous Vehicles Based on B-Spline Algorithm / P. Wang, J. Yang, Y. Zhang, Q. Wang, B. Sun, D. Guo // World Electric Vehicle Journal. — 2022. — Vol. 13. — Is. 12. — Pp. 233. DOI: 10.3390/wevj13120233.
15. Калиткин Н. Н. В-сплайны высоких степеней / Н. Н. Калиткин, Н. М. Шляхов // Математическое моделирование. — 1999. — Т. 11. — № 11. — С. 64–74.
16. Ююкин И. В. Аппроксимация геоида методами сплайн-функций / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
17. Gao X. Double B-Spline Curve-Fitting and synchronization-Integrated Feedrate Scheduling Method for Five-Axis Linear-Segment Toolpath / X. Gao, S. Zhang, L. Qiu, X. Liu, Z. Wang, Y. Wang // Applied Sciences. — 2020. — Vol. 10. — Is. 9. — Pp. 3158. DOI: 10.3390/app10093158.
18. Magid E. Combining Voronoi Graph and Spline-Based Approaches for a Mobile Robot Path Planning / E. Magid, R. Lavrenov, M. Svinin, A. Khasianov // Informatics in Control, Automation and Robotics. ICINCO 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering. — Springer, Cham, 2020. — Vol. 495. — Pp. 475–496. DOI: 10.1007/978-3-030-11292-9_24.
19. Захаров К. С. Сглаживание кривизны траектории движения наземного робота в трехмерном пространстве / К. С. Захаров, А. И. Савельев // Известия Юго-Западного государственного университета. — 2020. — Т. 24. — № 4. — С. 107–125. DOI: 10.21869/2223-1560-2020-24-4-107-125.
20. Cao H. Implementing B-Spline Path Planning Method Based on Roundabout Geometry Elements / H. Cao, M. Zoldy // IEEE Access. — 2022. — Vol. 10. — Pp. 81434–81446. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3193667.
21. Zhang Y. An Obstacle Avoidance Path Planning and Evaluation Method for Intelligent Vehicles Based on the B-Spline Algorithm / Y. Zhang, P. Wang, K. Cui, H. Zhou, J. Yang, X. Kong // Sensors. — 2023. — Vol. 23. — Is. 19. — Pp. 8151. DOI: 10.3390/s23198151.
22. Majeed A. New cubic trigonometric Bezier-like functions with shape parameter: curvature and its spiral segment / A. Majeed, M. Abbas, A. A. Sittar, M. Kamran, S. Tahseen, H. Emadifar // Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 2021. — Pp. 1–13. DOI: 10.1155/2021/6330649.

23. Ююкин И. В. Модификация метода наименьших квадратов для сплайн-аппроксимации навигационной изоповерхности / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2019. — Т. 11. — № 4. — С. 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.

24. Hang H. Cubic B-Spline curves with shape parameter and their applications / H. Hang, X. Yao, Q. Li, M. Artiles // Mathematical Problems in Engineering. — 2017. — Vol. 2017. — Pp. 1–7. DOI: 10.1155/2017/3962617.

25. Stelia O. Computer Realizations of the Cubic Parametric Spline Curve of Bezicr Type / O. Stelia, L. Potapenko, I. Sirenko // International Journal of Computing. — 2019. — Vol. 18. — Is. 4. — Pp. 422–430. DOI: 10.47839/ijc.18.4.1612.

26. Ahmed A. Path Smoothing Algorithm Using Thin-Plate Spline / A. Ahmed, A. Soliman, A. Maged, M. Gaafar, M. Magdy // 2021 7th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR). — IEEE, 2021. — Pp. 349–353. DOI: 10.1109/ICCAR52225.2021.9463453.

27. Connors J. Manipulating B-Spline Based Paths for Obstacle Avoidance in Autonomous Ground Vehicles / J. Connors, G. Elkaim // Proceedings of the 2007 National Technical Meeting of The Institute of Navigation. — ION, 2007. — Pp. 1081–1088.

28. Ююкин И. В. Сплайновая модель оперирования гридированными данными как принцип электронного картографирования топографии морского дна / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 5. — С. 656–675. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-5-656-675.

29. Connors J. Analysis of a Spline Based, Obstacle Avoiding Path Planning Algorithm / J. Connors, G. Elkaim // 2007 IEEE 65th Vehicular Technology Conference-VTC2007-Spring. — IEEE, 2007. — Pp. 2565–2569. DOI: 10.1109/VETECS.2007.528.

30. Ююкин И. В. Синтез кубическими сплайнами искаженной изолинии в аспекте использования дифференциального режима спутниковой навигации / И. В. Ююкин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 3. — С. 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.

31. Zhang X. A Real-Time Collision Avoidance Framework of MASS Based on B-Spline and Optimal Decoupling Control / X. Zhang, C. Wang, K. T. Chui, R. W. Liu // Sensors. — 2021. — Vol. 21. — Is. 14. — Pp. 4911. DOI: 10.3390/s21144911.

32. Zhang X. Collision-avoidance navigation systems for Maritime Autonomous Surface Ships: A state of the art survey / X. Zhang, C. Wang, L. Jiang, L. An, R. Yang // Ocean Engineering. — 2021. — Vol. 235. — Pp. 109380. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109380.

33. Yan X.-P. A novel path planning approach for smart cargo ships based on anisotropic fast marching / X.-P. Yan, S.-W. Wang, F. Ma, Y.-C. Liu, J. Wang // Expert Systems with Applications. — 2020. — Vol. 159. — Pp. 113558. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113558.

34. Yuyukin I. V. Configuring the fan of spline gradients when approximating the navigational isoline with a linear piecewise functional / I. V. Yuyukin // Journal of Physics: Conference Series. — IOP Publishing, 2021. — Vol. 2032. — № 1. — Pp. 012054. DOI: 10.1088/1742-6596/2032/1/012054.

35. Liu Z. Gradient-Sensitive Optimization for Convolutional Neural Networks / Z. Liu, R. Feng, X. Li, W. Wang, X. Wu // Computational Intelligence and Neuroscience. — 2021. — Vol. 2021. — Pp. 1–16. DOI: 10.1155/2021/6671830.

REFERENCES

1. Vas'kov, A. S., and A. A. Mironenko. "The methods for planning no-go area clearing lines in the vessel's control systems." *Marine Intellectual Technologies* 3–1(61) (2023): 110–119. DOI: 10.37220/MIT.2023.61.3.036.

2. Vas'kov, Anatoliy S., and Aleksandr A. Mironenko. "Planning and control of the ship curvilinear route." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.3 (2023): 401–415. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-3-401-415.

3. Yuyukin, Igor V. "Spline synthesis of the charted reference of the field informativity in mission correlation-extreme navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.1 (2022): 25–39. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-1-25-39.

4. Safin, Ramil, Tatyana Tsoy, Roman Lavrenov, Ilya Afanasyev, and Evgeni Magid. "Modern Methods of Map Construction Using Optical Sensors Fusion." *The 2023 International Conference on Artificial Life and Robotics (ICAROB2023)*. Vol. 28. Alife Robotics Corporation Ltd., 2023. 166–169. DOI: 10.5954/ICAROB.2023.OS6-6.

5. Yuyukin, I.V. "Correlation-extreme method based on spline functions as an alternative to satellite navigation." *AIP Conference Proceedings*. Vol. 2476. No. 1. AIP Publishing, 2023. DOI: 10.1063/5.0102916.
6. Stepanov, O. A., Yu. A. Litvinenko, V. A. Vasil'ev, and A. M. Isaev. "Map-Aided Navigation Taking into Account a Priori Information on the Object Trajectory." *2023 30th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems (ICINS)*. IEEE, 2023. DOI: 10.23919/ICINS51816.2023.10168423.
7. Mironenko, Alexander A. Metodologiya formalizatsii navigatsionnoy obstanovki, planirovaniya marshruta i programmnyh traektoriy dvizheniya sudna. Dr. diss. Novorossiysk, 2016.
8. Berdyshev, Vitalii I., Victor B. Kostousov, and Aleksandr A. Popov. "Optimal Object Trajectories under Unfriendly Observation." *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Extremal Problems (NLA-2022)*. ISDCT SB RAS, 2022.
9. Lavrenov, Roman O. Matematicheskoe i programmnoe obespechenie resheniya zadashi mnogokriterialnogo poiska puti mobil'nogo obekta. PhD diss. Kazan, 2020.
10. Yuyukin, Igor V. "Spline interpolation of navigational isolines." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.6 (2019): 1026–1036. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-6-1026-1036.
11. Berdyshev, Vitalii Ivanovich, and Viktor Borisovich Kostousov. "Extremal problems of navigation by geophysical fields." *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications* 6.2 (2018): 4–18. DOI: 10.32523/2306-6172-2018-6-2-4-18.
12. Berglund, Tomas, Andrej Brodnik, Hakan Jonsson, Mats Staffanson, and Inge Soderkvist. "Planning Smooth and Obstacle-Avoiding B-Spline Paths for Autonomous Mining Vehicles." *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering* 7.1 (2009): 167–172. DOI: 10.1109/TASE.2009.2015886.
13. Yuyukin, Igor V. "Optimal spline trajectory of the ship informative route in the map-aided navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.2 (2022): 230–247. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-2-230-247.
14. Wang, Pengwei, Jinshan Yang, Yulong Zhang, Qinwei Wang, Binbin Sun, and Dong Guo. "Obstacle-Avoidance Path-Planning Algorithm for Autonomous Vehicles Based on B-Spline Algorithm." *World Electric Vehicle Journal* 13.12 (2022): 233. DOI: 10.3390/wevj13120233.
15. Kalitkin, Nikolay N., and Nikolay M. Shlyakhov. "B-Splines of High Powers." *Matematicheskoe modelirovanie* 11.11 (1999): 64–74.
16. Yuyukin, Igor V. "Geoid approximation by methods of spline functions." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 262–271. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-262-271.
17. Gao, Xiangyu, Shuyou Zhang, Lemiao Qiu, Xiaojian Liu, Zili Wang, and Yang Wang. "Double B-Spline Curve-Fitting and synchronization-Integrated Feedrate Scheduling Method for Five-Axis Linear-Segment Toolpath." *Applied Sciences* 10.9 (2020): 3158. DOI: 10.3390/app10093158.
18. Magid, Evgeni, Roman Lavrenov, Mikhail Svinin, and Airat Khasianov. "Combining Voronoi Graph and Spline-Based Approaches for a Mobile Robot Path Planning." *Informatics in Control, Automation and Robotics. ICINCO 2017. Lecture Notes in Electrical Engineering, vol 495*. Springer, Cham, 2020. 475–496. DOI: 10.1007/978-3-030-11292-9_24.
19. Zakharov, K. S., and A. I. Saveliev. "Smoothing the Curvature of Trajectory of Ground Robot in 3D Space." *Proceedings of Southwest State University* 24.4 (2020): 107–125. DOI: 10.21869/2223-1560-2020-24-4-107-125.
20. Cao, Hang, and Mate Zoldy. "Implementing B-Spline Path Planning Method Based on Roundabout Geometry Elements." *IEEE Access* 10 (2022): 81434–81446. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3193667.
21. Zhang, Yulong, Pengwei Wang, Kaichen Cui, Hengheng Zhou, Jinshan Yang, and Xiangcun Kong. "An Obstacle Avoidance Path Planning and Evaluation Method for Intelligent Vehicles Based on the B-Spline Algorithm." *Sensors* 23.19 (2023): 8151. DOI: 10.3390/s23198151.
22. Majeed, Abdul, Muhammad Abbas, Amna Abdul Sittar, Mohsin Kamran, Saba Tahseen, and Homan Emadifar. "New cubic trigonometric Bezier-like functions with shape parameter: curvature and its spiral segment." *Journal of Mathematics* 2021 (2021): 1–13. DOI: 10.1155/2021/6330649.
23. Yuyukin, Igor V. "Modification of the least squares method for spline approximation of navigational isosurface." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 11.4 (2019): 631–639. DOI: 10.21821/2309-5180-2019-11-4-631-639.
24. Hang, Houjun, Xing Yao, Qingqing Li, and Michel Artiles. "Cubic B-Spline curves with shape parameter and their applications." *Mathematical Problems in Engineering* 2017 (2017): 1–7. DOI: 10.1155/2017/3962617.

25. Stelia, Oleg, Leonid Potapenko, and Ihor Sirenko. "Computer Realizations of the Cubic Parametric Spline Curve of Bezier Type." *International Journal of Computing* 18.4 (2019): 422–430. DOI: 10.47839/ijc.18.4.1612.
26. Ahmed, Abdullah, Aref Soliman, Ahmed Maged, Muhammed Gaafar, and Mahmoud Magdy. "Path Smoothing Algorithm Using Thin-Plate Spline." *2021 7th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR)*. IEEE, 2021. DOI: 10.1109/ICCAR52225.2021.9463453.
27. Connors, John, and Gabriel Elkaim. "Manipulating B-Spline Based Paths for Obstacle Avoidance in Autonomous Ground Vehicles." *Proceedings of the 2007 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*. ION, 2007.
28. Yuyukin, Igor V. "Spline model of gridded data operation as a principle of electronic mapping seabed topography." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.5 (2022): 656–675. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-5-656-675.
29. Connors, John, and Gabriel Elkaim. "Analysis of a spline based, obstacle avoiding path planning algorithm." *2007 IEEE 65th Vehicular Technology Conference-VTC2007-Spring*. IEEE, 2007. DOI: 10.1109/VETECS.2007.528.
30. Yuyukin, Igor V. "Cubic splines synthesis of a distorted isoline in the aspect of using differential mode of satellite navigation." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.3 (2021): 341–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-3-341-358.
31. Zhang, Xinyu, Chengbo Wang, Kwok Tai Chui, and Ryan Wen Liu. "A Real-Time Collision Avoidance Framework of MASS Based on B-Spline and Optimal Decoupling Control." *Sensors* 21.14 (2021): 4911. DOI: 10.3390/s21144911.
32. Zhang, Xinyu, Chengbo Wang, Lingling Jiang, Lanxuan An, and Rui Yang. "Collision-avoidance navigation systems for Maritime Autonomous Surface Ships: A state of the art survey." *Ocean Engineering* 235 (2021): 109380. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2021.109380.
33. Yan, Xin-Ping, Shu-Wu Wang, Feng Ma, Yuan-Chang Liu, and Jin Wang. "A novel path planning approach for smart cargo ships based on anisotropic fast marching." *Expert Systems with Applications* 159 (2020): 113558. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113558.
34. Yuyukin, I.V. "Configuring the fan of spline gradients when approximating the navigational isoline with a linear piecewise functional." *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 2032. No. 1. IOP Publishing, 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/2032/1/012054.
35. Liu, Zhipeng, Rui Feng, Xiuhua Li, Wei Wang, and Xiaoling Wu. "Gradient-Sensitive Optimization for Convolutional Neural Networks." *Computational Intelligence and Neuroscience* 2021 (2021): 1–16. DOI: 10.1155/2021/6671830.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Ююкин Игорь Викторович —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: uukiniv@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Yuyukin, Igor V. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: uukiniv@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 21 марта 2024 г.
Received: March 21, 2024.