

RELATIONSHIPS BETWEEN RIVER DUNE PARAMETERS WHEN APPROXIMATING THEIR LONGITUDINAL PROFILE BY A TRIANGLE

V. I. Zamyshlyayev

State Hydrological Institute, St. Petersburg, Russian Federation

The subject of the study is the geometric characteristics of river bed forms, the knowledge of which is important for solving a number of river hydraulics problems, in particular for determining the hydraulic resistance of the channel. It should be noted that many researchers consider that its value depends on the steepness of the river dunes. At the same time, there is a lot of data indicating that in addition to the dune steepness, the shape of the longitudinal relief of the bed forms, namely, the location of the crest of the dune relative to its troughs, also influences the value of hydraulic resistance. In order to take this circumstance into account, the notion of the dune asymmetry coefficient and the notion of the wetted perimeter of the dune are introduced. The application of the possibility of approximating the longitudinal profile of the dune by a triangle has allowed us to match the main elements of the triangle with the parameters of river dunes normally used in studies of the fluvial process. Since the triangle elements are connected by well-known geometric and trigonometric relations, the proposed approximation allows us to analytically derive dependences between the main parameters characterising river dunes. For clarity, the obtained relationships are presented not only in the form of formulae, but also in the form of graphs and tables. Although the task of extensive verification of the deduced relations by actual data is not set in the present paper, the obtained dependences are in good agreement with some results of statistical processing of data from field and laboratory researches given in the literature on river hydraulics, which confirms the admissibility of approximating the dune shape by a triangle and the possibility of using the deduced relationships as at least an approximate assessment of the quantitative values of the main river dune parameters.

Keywords: dune shape approximation, triangle, river dune parameters, dune asymmetry coefficient, dune wetted perimeter, dune steepness, channel hydraulic resistance.

For citation:

Zamyshlyayev, Vitaly I. "Relationships between river dune parameters when approximating their longitudinal profile by a triangle." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 16.2 (2024): 236–250. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-2-236-250.

УДК 556.536

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ ДОННЫХ ГРЯД ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ИХ ПРОДОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

В. И. Замышляев

ФГБУ «Государственный гидрологический институт»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Предметом исследования являются геометрические характеристики русловых донных форм, знание которых необходимо для решения ряда задач речной гидравлики, в частности для определения гидравлического сопротивления русла. Отмечается, что многие исследователи ставят его значение в зависимость от крутизны донных гряд. Вместе с тем существует немало данных, указывающих на то, что помимо крутизны гряд влияние на величину гидравлического сопротивления оказывает также форма продольного рельефа донных форм, а именно расположение вершины гряды относительно ее подвалов. С целью учета этого обстоятельства введены понятия «коэффициент асимметричности гряды» и «смоченный периметр гряды». Применение возможности аппроксимации продольного профиля гряды треугольником позволило сопоставить основные элементы треугольника параметрам донных гряд, обычно используемых при проведении исследований руслового процесса. Поскольку элементы треугольника связаны хорошо известными геометрическими и тригонометрическими соотношениями, предлагаемая аппроксимация позволяет аналитически вывести соотношения между основными параметрами, характеризующими донные гряды. Для удобства восприятия полученные зависимости представлены не только в виде формул,

но и в виде графиков и таблиц. Несмотря на то, что в работе не ставилась задача детальной проверки выведенных соотношений фактическими данными, тем не менее полученные зависимости находятся в хорошем соответствии с некоторыми приведенными в литературе по речной гидравлике результатами статистической обработки данных натурных и лабораторных исследований, что подтверждает допустимость аппроксимации формы гряды треугольником и возможность использования выведенных зависимостей в качестве по крайней мере приближенной оценки количественных значений основных параметров.

Ключевые слова: аппроксимация формы гряды, треугольник, параметры донных гряд, коэффициент асимметричности гряды, смоченный периметр гряды, крутизна гряды, гидравлическое сопротивление русла.

Для цитирования:

Замышляев В. И. Соотношения между параметрами донных гряд при аппроксимации их продольного сечения треугольником / В. И. Замышляев // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2024. — Т. 16. — № 2. — С. 236–250. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-2-236-250.

Введение (Introduction)

Для решения многих задач речной гидравлики и построения математических и основанных на них численных моделей движения потока по речному руслу и пойме необходимо знать гидравлическое сопротивление русла, характеризующее различными показателями: коэффициентами Шези, Маннинга, Дарси – Вейсбаха и т. д., для расчета которых предложено огромное количество формул. Общеизвестно, что на гидравлическое сопротивление русла потоку оказывает влияние не только сопротивление зернистой шероховатости, определяемое размером и формой частиц донных отложений русла, но и множество других факторов, среди которых форма поперечного сечения русла, его плановая конфигурация; резкие местные расширения русла или его разветвления; характер взаимодействия руслового и пойменного потоков; наличие и характер ледового покрова и растительности в русле и на пойме; наличие в русле и на пойме искусственных сооружений, таких, например, как мосты, водозаборы или водовыпуски; режим неустановившегося движения потока и т. д. Однако в процессе исследования гидравлического сопротивления русла необходимо также учитывать хорошо известное обстоятельство, свидетельствующее о том, что при движении потока по речному размываемому руслу, т. е. руслу, сложенному из несвязанного материала, на дне потока почти всегда появляются похожие на волны аллювиальные образования, имеющие различные размеры и формы. Довольно часто на теле более крупных донных образований могут находиться образования меньшего размера, в результате чего рельеф речного дна представляет собой достаточно сложную суперпозицию волн различных порядков. Такое строение дна оказывает существенное влияние на формирование гидродинамической структуры потока и, соответственно, при определении величины гидравлического сопротивления русла необходимо учитывать так называемую *грядовую шероховатость дна*, т. е. сопротивление, оказываемое донными формами. Поэтому вопрос изучения рельефа дна в сочетании с другими факторами, определяющими режим руслового потока и морфологию русла, имеет важное значение.

В течение многих десятилетий при исследовании вопросов гидравлических сопротивлений основным способом изучения рельефа дна речного русла являлось выделение донных наносных форм, рассматриваемых как элементы грядовой шероховатости дна (и не только), и поиск закономерностей, связывающих морфометрические характеристики рельефа дна со свойствами наносов, главным образом донных, с одной стороны, а с другой — с гидродинамическими характеристиками потока. При таком подходе адекватное описание рельефа дна означало адекватное описание донных образований, что предполагало выделение (идентификацию) как самих этих образований, так и тех элементов (параметров), характеризующих их геометрическую форму, которыми обычно оперируют при изучении закономерностей речной гидравлики и руслового процесса. Несмотря на длительный период проведения подобных исследований многие специалисты отмечают, что до сих пор отсутствует надежная информация о параметрах гряд [1], поэтому целью настоящей статьи, являющейся по-прежнему актуальной, служит поиск зависимостей между численными значениями параметров гряд.

Два из четырех структурных уровня, выделяемых в гидроморфологической теории руслового процесса, связаны главным образом не с плановой формой русла и поймы, а именно с рельефом дна — *уровнем микроформ*, к которым относят рифели, гряды и антидюны, и *уровнем мезоформ*, к которым относят перекааты, осередки и небольшие острова. В данной работе предметом исследования являются микроформы, в основном гряды (дюны), несмотря на то, что полученные зависимости в большой степени могут быть применены к рифелям и антидюнам. Несмотря на то, что чаще всего гряды имеют трехмерную форму, при их теоретическом описании, как правило, используется двухмерная идеализация, при которой продольное сечение донной формы (в направление течения воды) можно представить в виде рис. 1.



Рис. 1. Идеализация продольного сечения двухмерной гряды
(движение потока справа налево)

Fig. 1. Idealization of the longitudinal profile of a two-dimensional river dune
(flow movement from right to left)

Таким образом, донная форма — гряда — обычно идентифицируется как образование, лежащее между двумя локальными минимумами отметок донной поверхности. Эти минимумы называются, соответственно, *верхним и нижним по течению подвальями гряды*, а максимальная отметка поверхности дна в пределах гряды — ее *гребнем (вершиной)*. Также обычно выделяют *напорный* (лобовой, верховой) и *тыловой* (низовой) *склоны гряды*. Для количественных характеристик геометрической формы гряды чаще всего используют следующие показатели (см. рис. 1): длина гряды λ , высота гряды h , угол тылового склона α_1 , угол напорного склона α_2 , а также производные показатели от этих параметров, такие, например, как *крутизна гряды*, представляющая собой отношение высоты гряды к ее длине h / λ (далее в некоторых случаях будем обозначать этот показатель через ψ). При исследовании вопросов, связанных, например, с расходом донных наносов, важное значение также имеет такой динамический показатель, как скорость движения гряды (в данной работе не рассматривается).

Прежде чем перейти к анализу численных значений указанных параметров, необходимо отметить, что в действительности при рассмотрении гряд даже в таком идеализированном виде их подвалья (верхнее и нижнее) не всегда имеют одинаковые отметки по высоте, т. е. соединяющая их линия не всегда является горизонтальной. По этой причине существует некоторая произвольность идентификации указанных параметров и прежде всего длины и высоты гряды. Обычно за длину гряды принимают расстояние между верхним и нижним подвальями гряды, но поскольку соединяющая их линия не обязательно является горизонтальной, в одних случаях за длину гряды принимают непосредственно длину данного отрезка, в других — длиной гряды считают проекцию этого отрезка на ось x , которая в свою очередь может выбираться не горизонтальной, а имеющей наклон, равный среднему уклону потока / русла.

В некоторых случаях за длину гряды принимают расстояние между гребнями соседних гряд, но и в этом случае существует альтернатива: считать ли длиной гряды длину соединяющего гребни гряды отрезка или его проекцию на ось x . Кроме того, возникает дополнительная неопределенность: к какой из двух участвующих в процедуре измерения гряд (верхней или нижней) относить полученное значение. Такая же альтернативность существует и в отношении высоты гряды,

за которую в одних случаях принимают превышение отметки гребня гряды над отметками нижнего подвалья, в других — превышение отметки гребня гряды над отметками верхнего подвалья, а иногда — длину перпендикуляра, опущенного из гребня гряды на линию, соединяющую верхнее и нижнее подвалья гряды. При этом следует заметить, что если линия, соединяющая подвалья гряды, горизонтальна, то все эти три значения совпадают (о существующей неопределенности в этом вопросе также отмечается в работах [2], [3]). В настоящей работе примем, что линия, соединяющая подвалья гряды, является горизонтальной, и, соответственно, в дальнейшем за длину гряды будем принимать расстояние между ее подвальями, а за высоту — длину перпендикуляра, опущенного из гребня гряды на линию, соединяющую подвалья гряды.

Многие исследователи, занимавшиеся изучением морфометрических характеристик грядового рельефа дна, отмечали в своих работах (см., например, [4], [5] и др.), что среди факторов, оказывающих существенное влияние на гидравлическое сопротивление русла, важное значение имеет крутизна гряд h / λ . Существует большое количество формул, авторы которых ставят гидравлическое сопротивление в зависимость от крутизны донных форм. Такое мнение представляется вполне логичным, поскольку эта величина, по сути, характеризует шероховатость дна, обусловленную наличием донных волн, и поэтому численные значения данного параметра в различных гидравлических условиях представляют безусловный интерес. Вместе с тем представляется вполне очевидным, что на гидравлическое сопротивление, которое подстилающая поверхность оказывает потоку, должен оказывать влияние не только относительный размер выступов шероховатости ложа потока, но и характерные формы таких выступов.

Проведем мысленный эксперимент, представив два жестких (неразрываемых) гидравлических лотка, имеющих уклоны и одинаковые поперечные сечения (например, прямоугольные), в которые через начальное сечение подается одинаковый расход воды. Представим также, что дно этих лотков сформировано из одного и того же материала, т. е. с одинаковой крупностью зерен, и на дне лотков искусственно созданы волнообразные формы, похожие на речные гряды. Пусть отношение амплитуды этих волн к их характерной длине будет в среднем одинаковым в обоих лотках, но одновременно эти волны будут иметь существенно различную форму (например, различное расположение максимумов отметок волн относительно их длины). Навряд ли кто-либо станет оспаривать тот факт, что при таких условиях гидравлическое сопротивление потоку в этих двух лотках может быть различным. Свидетельства этому можно найти также в проведенных натурных исследованиях. Например, в работе [6] выполнено исследование большого объема данных — изучены донные формы на крупнейших реках: Амазонке, Жёлтой реке, Миссисипи и др. Показано, что угол наклона тылового склона дюн, который на малых реках и в лабораторных лотках часто считают близким к углу естественного откоса песка под водой, на больших реках имеет гораздо меньшие значения — преимущественно менее 10° . Такая геометрия дюн может, по мнению авторов, существенно изменяться характер гидравлического сопротивления грядового дна, поскольку меняется геометрия турбулентного потока, расположение и размеры турбулентных вихрей в тыловых зонах гряд. Таким образом, пологий угол тылового склона может существенно снижать «грядовую» компоненту гидравлического сопротивления русла. Доводы авторов представляются вполне разумными, поэтому исследование параметров формы гряды, связанных с ее асимметричностью, является вполне актуальным и показатель, характеризующий асимметричность донных форм, понимаемый в контексте данной работы как *асимметричность продольного профиля гряды*, должен учитываться при изучении, по крайней мере, вопросов, связанных с гидравлическим сопротивлением речных русел. Однако этому фактору уделено недостаточное внимание и имеется лишь небольшое количество работ, в которых исследована продольная асимметричность формы донных образований.

Ввиду вышеизложенного для изучения морфометрических зависимостей, учитывающих форму донных образований, помимо относительной величины выступов шероховатости, характеризующей чаще всего значением крутизны гряды h / λ , необходимо ввести еще некоторые параметры, а именно показатель (коэффициент) асимметричности гряды и параметр, характеризующий

длину гряды от верхнего до нижнего подвала гряды, измеренную не по прямой, а по контуру гряды. По аналогии с известным показателем поперечного сечения русла назовем последний параметр *смоченным периметром гряды*, обозначив его через L . В некоторых работах (например, [3]) исследованы статистики этого параметра и его слагаемых L_1 и L_2 .

Методы и материалы (Methods and Materials)

Для исследования зависимостей между некоторыми из указанных параметров можно без существенной потери точности аппроксимировать представленную ранее двухмерную идеализацию гряды (см. рис. 1) треугольником, длина наибольшей (нижней) стороны которого равна длине гряды λ , а длина нормали из противостоящей вершины треугольника на эту наибольшую сторону — высоте гряды h (рис. 2).

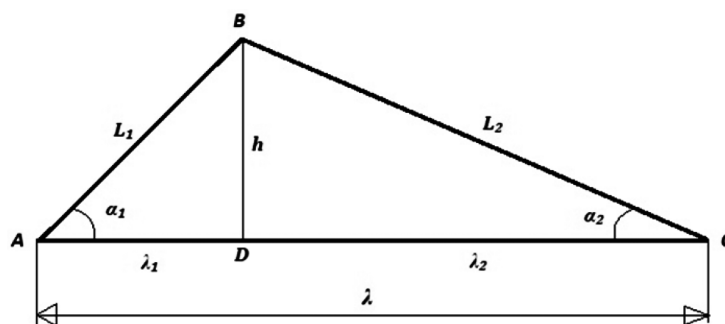


Рис. 2. Схематизация гряды в виде треугольника ABC
(движение потока справа налево)

Fig. 2. Schematization of the dune by a triangle ABC
(flow movement from right to left)

На допустимость подобной аппроксимации указывается также в работах [3], [7, с. 122] и др. Будем также считать, что наибольшая сторона треугольника горизонтальна. Тогда справедливо приведенное ранее замечание по поводу независимости значений высоты и длины гряды от способа их определения. Применение такой аппроксимации формы гряды позволяет использовать хорошо известные соотношения из геометрии и тригонометрии и легко получить связи между всеми указанными ранее и приведенными на рис. 2 параметрами или их комбинациями. В частности, можно рассчитать зависимость значений смоченного периметра гряды L , а также его слагаемых L_1 и L_2 от крутизны гряды h/λ , причем L при одних и тех же значениях h/λ дополнительно зависит от положения вершины треугольника (гребня гряды) вдоль линии, соединяющей подвалы, т. е. от степени асимметричности гряды.

Таким образом, основным методом, используемым в данной работе, является аппроксимация продольного профиля гряды треугольником, что позволило применить хорошо развитый аппарат анализа геометрических и тригонометрических соотношений и вывести аналитическим путем зависимости между теми элементами треугольника, которые соответствуют основным измерителям, используемым на практике для описания геометрических форм донных гряд.

Результаты (Results)

Исходя из того, что треугольники ABD и CBD являются прямоугольными, и из очевидных равенств:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1 + \lambda_2; \\ L &= L_1 + L_2,\end{aligned}\tag{1}$$

имеем следующие соотношения:

$$L_1 = \sqrt{\lambda_1^2 + h^2} = \lambda_1 \sqrt{1 + (h/\lambda_1)^2} = \lambda_1 \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_1)^2};\tag{2}$$

$$L_2 = \sqrt{\lambda_2^2 + h^2} = \lambda_2 \sqrt{1 + (h / \lambda_2)^2} = \lambda_2 \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_2)^2}; \quad (3)$$

$$L = \lambda_1 \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_1)^2} + \lambda_2 \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_2)^2}. \quad (4)$$

Очевидно, что при одном и том же значении крутизны гряды, ряд ее геометрических характеристик будут зависеть от асимметричности продольного профиля гряды, т. е. от положения ее гребня (вершины треугольника) относительно ее подвалов. Несмотря на то, что показатель асимметричности треугольника может быть учтен различными способами, например, через соотношение углов при основании треугольника, в дальнейшем асимметричность гряды будем в основном характеризовать одним из двух коэффициентов:

$$k = \lambda_1 / \lambda \quad (5)$$

или

$$k_* = \lambda_1 / \lambda_2. \quad (6)$$

Для речных гряд, для которых типичной ситуацией является превышение длины напорного склона над длиной тылового склона, значения этих показателей не выходят за пределы следующих диапазонов:

$$0 < k \leq 0,5; \\ 0 < k_* \leq 1. \quad (7)$$

Заметим, что пределы значений для k и k_* , указанные в соотношениях (7), следуют не из каких бы то ни было геометрических ограничений, присущих треугольникам, а лишь из представлений о геометрической форме, приписываемой речным микроформам, для которых гребень всегда располагается между двумя подвалами. Значения коэффициента асимметричности в диапазоне $0,5 < k \leq 1$ будут означать, что напорный склон таких донных форм меньше по длине тылового склона, что не характерно для речных гряд. Теоретически допустимое для треугольников значение $k_* > 1$ означало бы, что гребень гряды расположен ниже по течению, чем нижнее подвалье гряды, что для гряд, сложенных несвязными материалами, разумеется, невозможно. В связи с этим возникает вопрос: если при обработке батиграмм наблюдаются иные значения, чем указанные в соотношениях (7), т. е. если $k > 0,5$ и $k_* > 1$, то такие донные формы должны рассматриваться как гряды или как дефекты обработки батиграмм. По-видимому, такие неровности профиля на батиграммах не следует идентифицировать как донные микроформы, их следует просто игнорировать.

Нетрудно вывести соотношение между k и k_* :

$$k = \lambda_1 / \lambda = \lambda_1 / (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 (1 + \lambda_1 / \lambda_2)} = \frac{k_*}{1 + k_*} \quad (8)$$

и, соответственно,

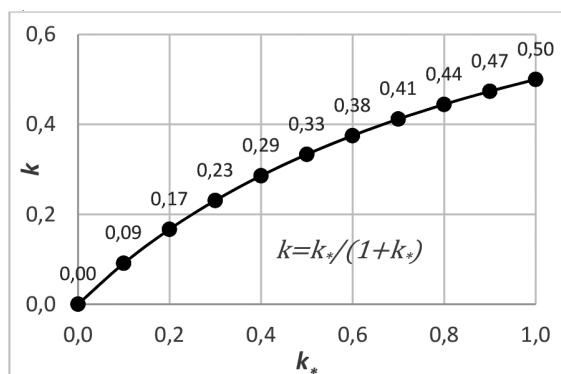
$$k_* = \frac{k}{1 - k}. \quad (9)$$

Очевидно также, что

$$\lambda_2 / \lambda = (\lambda - \lambda_1) / \lambda = 1 - k. \quad (10)$$

Зависимости между коэффициентами асимметричности k и k_* показаны на рис. 3.

а)



б)

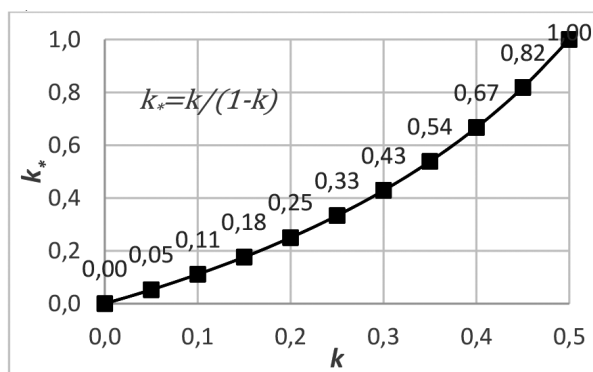


Рис. 3. Графики зависимостей:

а — k от k_* ; б — k_* от k

Fig. 3. Dependency graphs of:

а — k versus k_* ; б — k_* versus k

С учетом соотношения (5) уравнения (2)–(4) можно переписать в следующем виде:

$$L_1 / \lambda = \frac{(\lambda_1 / \lambda)}{\cos \alpha_1} = \frac{k}{\cos \alpha_1}; \quad (11)$$

$$L_2 / \lambda = \frac{(\lambda_2 / \lambda)}{\cos \alpha_2} = \frac{[(\lambda - \lambda_1) / \lambda]}{\cos \alpha_2} = \frac{1 - k}{\cos \alpha_2}; \quad (12)$$

$$L / \lambda = \frac{k}{\cos \alpha_1} + \frac{1 - k}{\cos \alpha_2}. \quad (13)$$

Различные исследователи в своих работах указывают разные диапазоны значений крутизны гряд. Например, в работе [5, с. 164] указан диапазон h / λ от 0,005 до 0,08–0,2, в монографии [7, с. 123] указаны значения от 0,08 до 0,5, в [8] — от 0,02 до 0,1; в [9] — от 0,05 до 0,2; в [4] — от 0,01 до 0,2. Ввиду нерегулярного характера рельефа речного дна и существующих методов обработки данных батиметрии крайне сомнительным является причисление к грядам донного образования, крутизна которого равнялась бы 0,01, а тем более 0,005, т. е. считать грядой образование, у которого характерный вертикальный размер составляет всего 0,01, а тем более 0,005 характерного горизонтального размера. Скорее, такие образования на батиграммах следует трактовать как *случайные отклонения* (возмущения), связанные с тем, что однонаправленные срезы батиграмм не вполне совпадают с действительным направлением перемещения донных гряд и что формы гряд существенно трехмерны. Тем не менее в данной работе зависимости относительного смоченного периметра гряды L / h от ее крутизны были рассчитаны для значений h / λ в диапазоне от 0,01 до 0,55, используя в качестве параметра различные значения коэффициентов асимметричности гряды k и k_* . Характер этих зависимостей на всем диапазоне наблюдавшихся значений крутизны гряд имеет примерно одинаковый вид для любых значений коэффициентов асимметричности гряд, что видно из семейства параметрических графиков, приведенного на рис. 4, а — кривые практически сливаются на всем диапазоне значений крутизны. Вместе с тем в большинстве случаев наблюдаемые значения крутизны гряд все же лежат в диапазоне от 0,1 до 0,3, поэтому на рис. 4, б представлен укрупненный фрагмент того же графика для наиболее типичных значений крутизны гряд; $0,1 \leq h / \lambda \leq 0,3$. Эти же зависимости для указанного диапазона значений h / λ представлены в табл. 1.

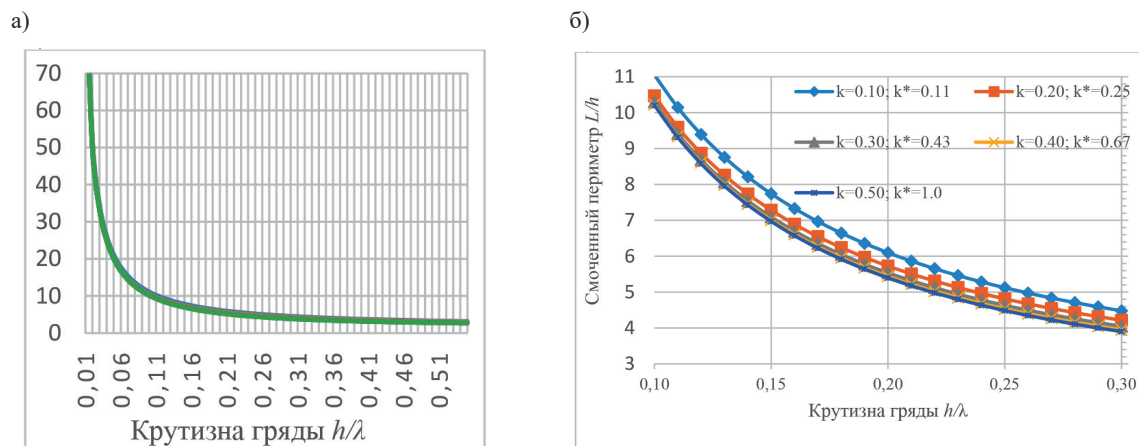


Рис. 4. Зависимость относительного смоченного периметра гряды L/h от ее крутизны h/λ :

а — в диапазоне значений h/λ от 0,01 до 0,55; б — в диапазоне значений h/λ от 0,1 до 0,3

Fig. 4. Dependence of the relative wetted perimeter of the dune L/h on its steepness h/λ :

а — in the range of h/λ values from 0.01 to 0.55; б — in the range of h/λ values from 0.1 to 0.3

Таблица 1

**Значения смоченного периметра гряды, отнесенного к ее высоте L/h ,
при различных значениях крутизны h/λ и асимметричности гряд k и k_***

h/λ	L/h				
	$k = 0,10$ $k_* = 0,11$	$k = 0,20$ $k_* = 0,25$	$k = 0,30$ $k_* = 0,43$	$k = 0,40$ $k_* = 0,67$	$k = 0,50$ $k_* = 1,00$
0,10	10,47	10,30	10,23	10,21	10,20
0,11	9,59	9,42	9,35	9,32	9,31
0,12	8,87	8,68	8,61	8,58	8,57
0,13	8,26	8,07	7,99	7,96	7,95
0,14	7,73	7,54	7,46	7,43	7,42
0,15	7,28	7,09	7,01	6,97	6,96
0,16	6,89	6,70	6,61	6,57	6,56
0,17	6,55	6,36	6,27	6,22	6,21
0,18	6,24	6,05	5,96	5,92	5,90
0,19	5,97	5,78	5,69	5,64	5,63
0,20	5,73	5,54	5,44	5,40	5,39
0,21	5,51	5,32	5,22	5,18	5,16
0,22	5,31	5,12	5,03	4,98	4,97
0,23	5,13	4,94	4,85	4,80	4,79
0,24	4,96	4,78	4,68	4,64	4,62
0,25	4,81	4,63	4,54	4,49	4,47
0,26	4,67	4,50	4,40	4,35	4,34
0,27	4,55	4,37	4,27	4,22	4,21
0,28	4,43	4,26	4,16	4,11	4,09
0,29	4,32	4,15	4,05	4,00	3,99
0,30	4,22	4,05	3,95	3,90	3,89

Ранее в работе отмечалось, что гидравлическое сопротивление грядового дна во многом определяется значениями крутизны гряд. В этой связи интерес может представлять характер

зависимостей между крутизной гряды h/λ , углом тылового склона гряд α_1 и коэффициентом симметричности гряды, которые определяются с помощью той же идеализированной треугольной модели формы гряды.

Из очевидных геометрических и тригонометрических соотношений имеем (см. рис. 2):

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{\lambda_2(1 + \lambda_1/\lambda_2)} = \frac{k_* \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + k_*} = \frac{k_*}{1 + k_*} \operatorname{tg} \alpha_1 = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (11)$$

Аналогично получим

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{h}{\lambda_2(1 + \lambda_1/\lambda_2)} = \frac{h}{\lambda_2(1 + k_*)} = (1 - k) \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (12)$$

Параметрические графики зависимости крутизны гряд h/λ от k для некоторых характерных значений угла α_1 приведены на рис. 5, а. На рис. 5, б показаны аналогичные графики зависимости крутизны гряд h/λ от угла α_1 при различных значениях параметра k (k_*).

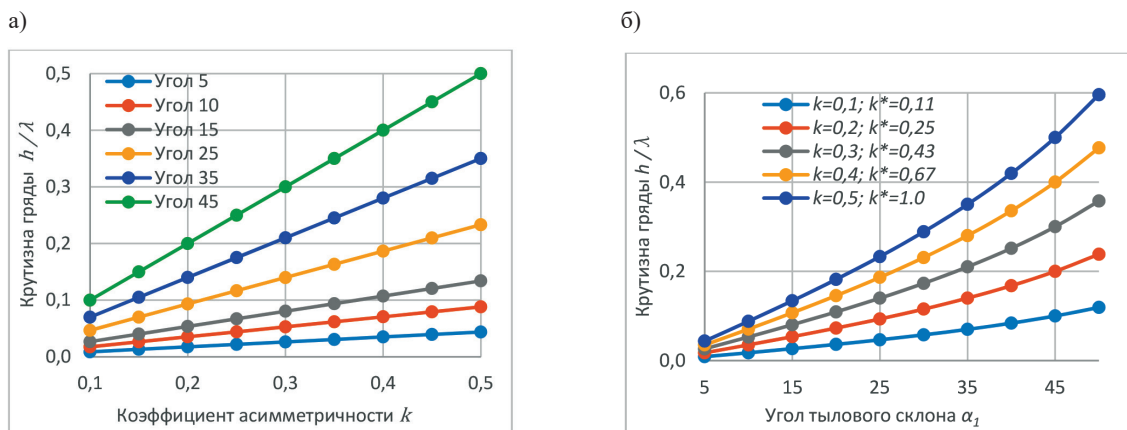


Рис. 5. Зависимость крутизны гряд h/λ : а — от коэффициента асимметрии k ; б — от угла α_1
Fig. 5. Dependence of dune steepness h/λ on: а — asymmetry coefficient k ; б — angle α_1

Можно отметить следующие численные значения крутизны гряд:

$$\begin{aligned} \frac{h}{\lambda} &= 0 \text{ при } k_* = 0 (k = 0); \\ \frac{h}{\lambda} &= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha_2 \text{ при } k_* = 1 (k = 0,5). \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что для различных коэффициентов асимметрии значения крутизны гряды не выходят за пределы, указанные на рис. 6.

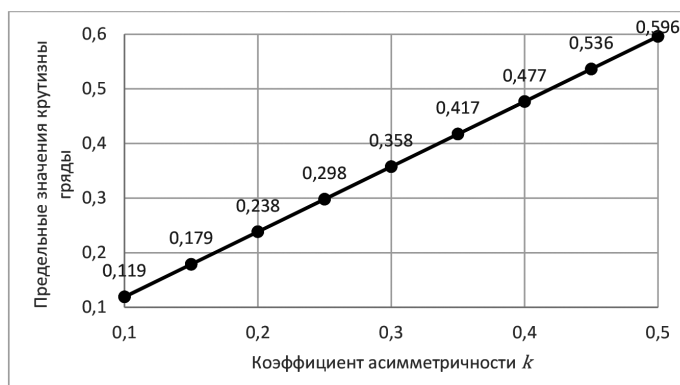


Рис. 6. Предельные значения крутизны гряды при различных коэффициентах асимметрии
Fig. 6. Limit values of dune steepness for various asymmetry coefficients

Эти пределы находят свое отражение в характере графиков, приведенных на рис. 7.

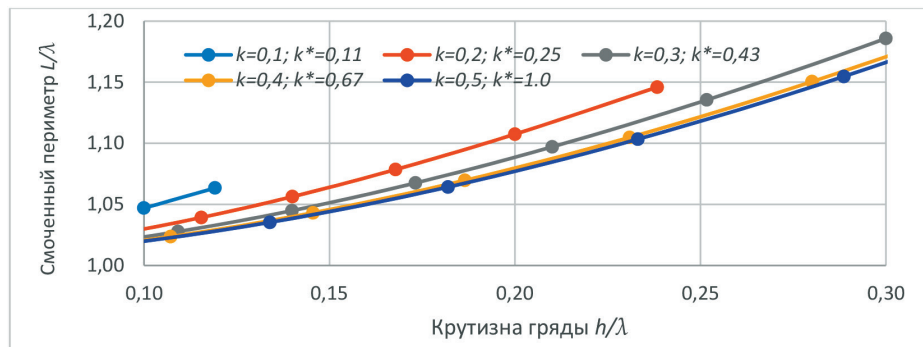


Рис. 7. Зависимость относительного смоченного периметра гряды L/λ от ее крутизны h/λ при различных коэффициентах асимметрии k (k_*)

Fig. 7. Dependence of the relative wetted perimeter of the dune L/λ on its steepness h/λ for various asymmetry coefficients k (k_*)

Из соотношений (10) и (11) с учетом равенства (8) имеем

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = k_* \cdot \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (14)$$

Используя аппроксимацию формы гряды треугольником, можно легко выразить или рассчитать разнообразные зависимости для элементов треугольника (гряды) или для их комбинаций (например, α_1 / α_2 (или α_2 / α_1), L_1 / L_2 (или L_2 / L_1), L / λ , L / L_1 (или L / L_2), L_1 / λ_1 (или L_2 / λ_2) и т. д.).

Например, значение L_1 / L_2 рассчитывается с помощью теоремы Пифагора:

$$h^2 = L_1^2 - \lambda_1^2 = L_2^2 - \lambda_2^2.$$

Тогда

$$L_2^2 - L_1^2 = \lambda_2^2 - \lambda_1^2,$$

откуда

$$L_2^2 \left[1 - \left(\frac{L_1}{L_2} \right)^2 \right] = \lambda_2^2 \left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^2 \right] = \lambda_2^2 (1 - k_*^2). \quad (15)$$

Наконец, учитывая тригонометрическое соотношение для треугольника DBC , получим

$$\frac{L_1}{L_2} = \sqrt{1 - (\cos \alpha_2)^2 (1 - k_*^2)}. \quad (16)$$

Аналогичным образом получим

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{k_*} \sqrt{k_*^2 + (\cos \alpha_1)^2 (1 - k_*^2)}. \quad (17)$$

Таким образом, соотношения между L_1 и L_2 можно выразить как функцию любого из углов α_1 или α_2 , имея k_* в качестве параметра.

Поскольку по определению

$$\alpha_1 = \operatorname{ctg} \left(\frac{h}{\lambda_1} \right), \quad (18)$$

из очевидного равенства (см. рис. 2):

$$h = \lambda_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (19)$$

получим

$$h/\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda} \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (20)$$

откуда

$$k = \frac{h/\lambda}{\operatorname{tg} \alpha_1} = (h/\lambda) \cdot \operatorname{ctg} \alpha_1. \quad (21)$$

Выражение для k через угол α_2 имеет следующий вид:

$$k = 1 - \frac{h/\lambda}{\operatorname{tg} \alpha_2} = 1 - (h/\lambda) \cdot \operatorname{ctg} \alpha_2. \quad (22)$$

Таким же образом получаются выражения для k_* , т. е. для λ_1/λ_2 и для λ_2/λ_1 , но при этом нужно помнить приведенное ранее замечание о характерных для речных гряд значениях коэффициента асимметрии. Графики зависимости k от α_1 приведены на рис. 8 при различных значениях параметра крутизны гряд в диапазоне характерных значений k в связи с тем, что поле точек в указанных координатах приведено в работе [10].

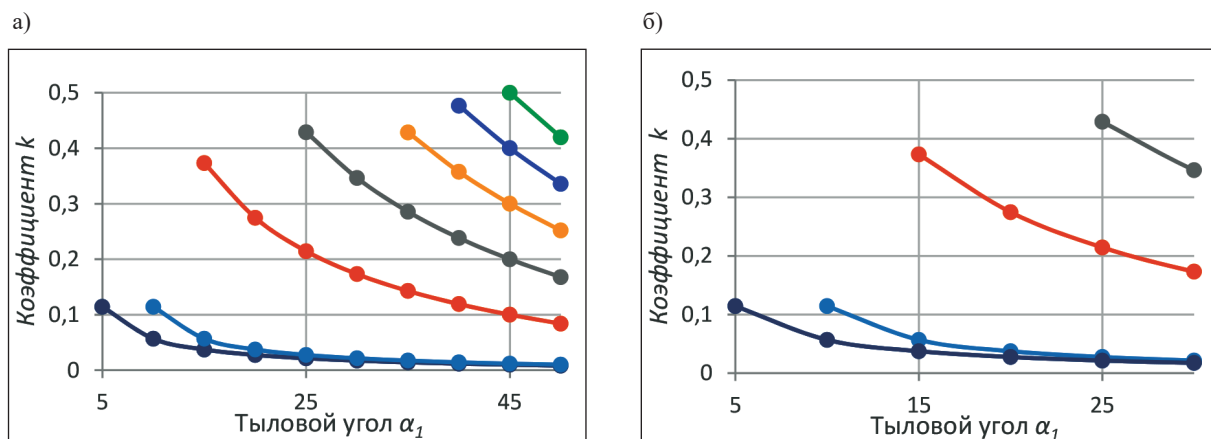


Рис. 8. Зависимость коэффициента асимметрии k от угла тылового склона α_1 при различных значениях крутизны гряды ψ :
а — углы от 5° до 50° ; б — углы от 5° до 30°

Fig. 8. Dependence of the asymmetry coefficient k on the leeside angle α_1 for different values of the dune steepness ψ :
а — angles from 5° to 50° ; б — angles from 5° to 30°

Длина тылового склона определяется в виде

$$L_1 = \sqrt{h^2 + \lambda_1^2}. \quad (23)$$

Параметры напорной части гряды определяются следующим образом:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_1; \quad (24)$$

$$L_2 = \sqrt{h^2 + \lambda_2^2}; \quad (25)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{ctg} \left(\frac{h}{\lambda_2} \right). \quad (26)$$

Аналогичным образом можно получить связи также между другими рассмотренными здесь параметрами в случае, если они представляют интерес для исследований (например, приведенные на рис. 9 графики зависимости показателя асимметричности гряды α_1/α_2 от угла тылового склона α_1 при различных значениях коэффициентов асимметричности k (k_*)).

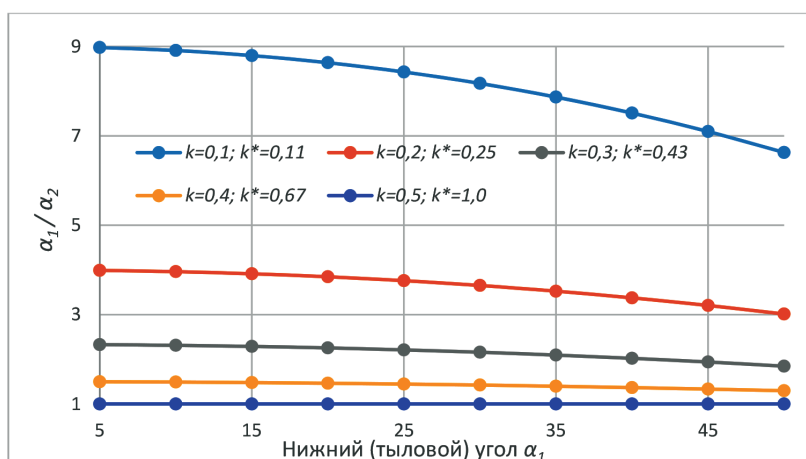


Рис. 9. Зависимость показателя асимметричности гряды α_1 / α_2 от ее угла тылового склона α_1 при различных коэффициентах асимметричности k (k_*)

Fig. 9. Dependence of the dune asymmetry index α_1 / α_2 on its leeside angle α_1 for different asymmetry coefficients k (k_*)

В табл. 2 указаны вычисленные на основании вышеприведенных формул значения показателя α_2 / α_1 , также характеризующего асимметричность гряд при различных значениях угла тылового склона α_1 (первая строка) и различных значениях коэффициента асимметричности k (первый столбец).

Таблица 2

Значения показателя α_2 / α_1 при различных значениях α_1 и k

$\alpha_1 \backslash k$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
0,10	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,13	0,13	0,14	0,15
0,15	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,20	0,21	0,22	0,24
0,20	0,25	0,25	0,26	0,26	0,27	0,27	0,28	0,30	0,31	0,33
0,25	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,38	0,39	0,41	0,43
0,30	0,43	0,43	0,44	0,44	0,45	0,46	0,48	0,49	0,52	0,54
0,35	0,54	0,54	0,55	0,55	0,56	0,58	0,59	0,61	0,63	0,65
0,40	0,67	0,67	0,68	0,68	0,69	0,70	0,71	0,73	0,75	0,77
0,45	0,82	0,82	0,82	0,83	0,84	0,84	0,85	0,86	0,87	0,89
0,50	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

В работе [11], на основании проведения статистического анализа большого массива данных, характеризующих геометрические параметры дюн на четырех участках реки Миссисипи (всего было обследовано 3258 дюн), среднее значение показателя α_2 / α_1 составляет 0,58. Если рассчитать среднее значение этого показателя α_2 / α_1 по данным табл. 2, то оно составит 0,51. Близость этих значений свидетельствует о том, что рассматриваемая в данной работе аппроксимация формы продольного профиля гряды треугольником является вполне допустимой. В работе [11] авторы также вводят в рассмотрение отрезки линии между подвальями гряды и точкой проекции гребня гряды на прямую, соединяющую подвалья гряды, т. е. в ней введены аналоги значений элементов λ_1 и λ_2 , однако анализ этих значений не выполнен.

Формулы (12)–(24) и аналогичные соотношения позволяют построить параметрические графики, отражающие зависимость между любыми двумя выбранными показателями, фиксируя третий показатель в качестве параметра. В частности, можно построить зависимости не только для всего смоченного периметра гряды L , но и для его составляющих L_1 и L_2 ($L = L_1 + L_2$), отнеся

их к какому-нибудь характерному размеру. Например, на рис. 10–12 представлены зависимости относительного смоченного периметра гряды L от угла тылового склона α_1 при различных коэффициентах асимметрии. Разница между ними заключается в параметре, используемом для нормирования величины L : на рис. 10 смоченный периметр отнесен к длине гряды λ , на рис. 11 — к составляющим смоченного периметра L_1 и L_2 соответственно, на рис. 12 — к высоте гряды h .

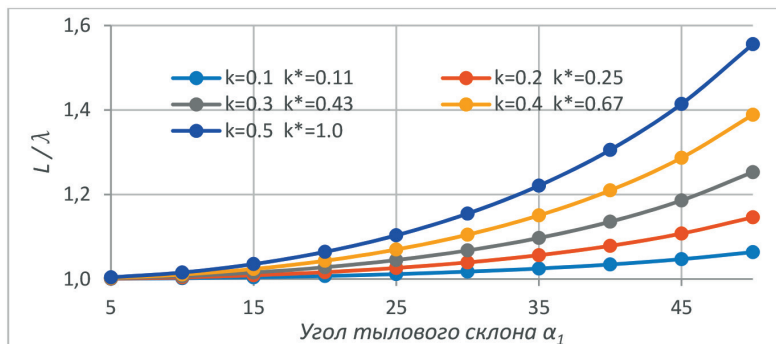


Рис. 10. Зависимость относительного смоченного периметра гряды L/λ от угла тылового склона α_1 при различных коэффициентах асимметрии
Fig. 10. Dependence of the relative wetted perimeter of the dune L/λ on the leeside angle α_1 for various asymmetry coefficients

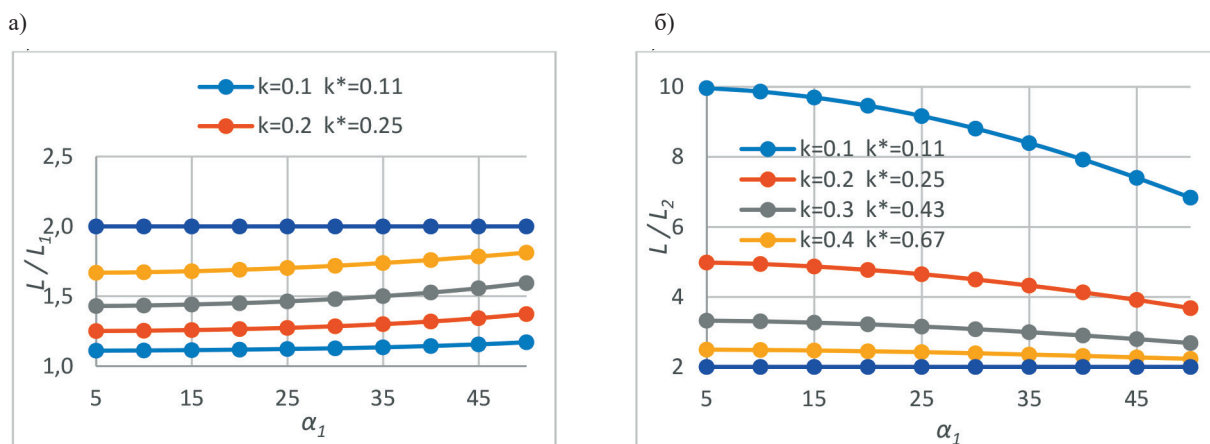


Рис. 11. Зависимость относительного смоченного периметра гряды от угла α_1 при различных значениях коэффициента асимметрии k : а — L/L_1 ; б — L/L_2
Fig. 11. Dependence of the relative wetted perimeter of the dune on the angle α_1 for different values of the asymmetry coefficient k : а — L/L_1 ; б — L/L_2

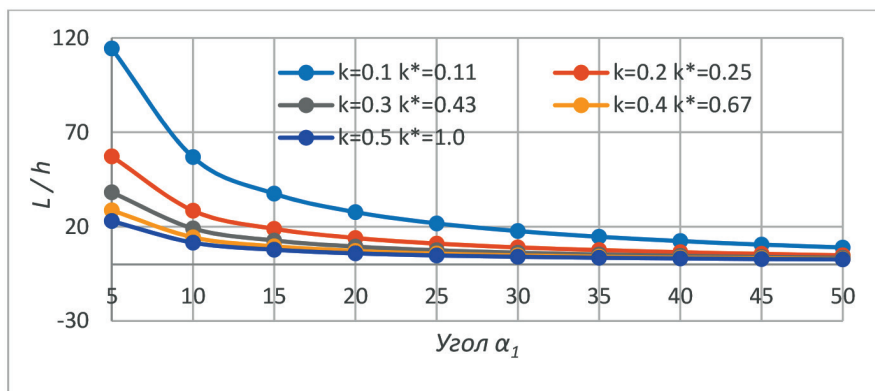


Рис. 12. Зависимость относительного смоченного периметра гряды L/h от угла α_1
Fig. 12. Dependence of the relative wetted perimeter of the dune L/h on the angle α_1

Впоследствии предполагается выполнить углубленную проверку соотношений, полученных в данной работе, на основе данных натурных и лабораторных наблюдений.

Заключение (Conclusion)

Основные результаты данной работы заключаются в следующем:

1. Отмечается, что для правильного определения гидравлического сопротивления потока важно учитывать не только показатель, характеризующий относительный размер выступов донных образований — крутизну гряд, но и параметр, учитывающий асимметрию гряд, — *коэффициент асимметрии*.

2. Отмечается, что в некоторых случаях для исследований закономерностей руслового процесса полезным оказывается введенный в данной работе показатель, характеризующий длину гряды, измеренную по контуру гряды, так называемый *смоченный периметр гряды*.

3. На основании аппроксимации продольного профиля донной гряды треугольником выведены зависимости между некоторыми показателями, используемыми в исследованиях по речной гидравлике и русловому процессу, в частности:

- зависимость смоченного периметра гряды, отнесенного к высоте гряды L/h , от ее крутизны h/λ (см. рис. 4) и от угла ее тылового склона α_1 (см. рис. 12);
- зависимость смоченного периметра гряды, отнесенного к длине гряды L/λ , от крутизны гряды h/λ (см. рис. 7) и от угла ее тылового склона α_1 (см. рис. 10);
- зависимость *крутизны гряды* h/λ от коэффициента асимметрии k (см. рис. 5, а) и от угла тылового склона гряды α_1 (см. рис. 5, б);
- зависимости L/L_1 и L/L_2 от угла тылового склона гряды α_1 (см. рис. 11);
- зависимость коэффициента асимметрии гряды k от угла тылового склона α_1 (см. рис. 8);
- зависимость углового показателя асимметрии гряды α_1/α_2 от угла тылового склона α_1 (см. рис. 9).

Для получения более точных количественных оценок некоторых рассчитанных параметров их значения в диапазонах наиболее частых значений аргументов приведены в табличной форме. Выведенные в данной работе зависимости могут служить материалом для приблизительной оценки значений некоторых показателей, используемых в исследованиях по речной гидравлике и русловому процессу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гладков Г. Л. Транспорт наносов в реках: зависимость параметров донных гряд от определяющих факторов / Г. Л. Гладков, П. В. Беляков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2021. — Т. 13. — № 1. — С. 52–63. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-52-63.
2. Scheiber L. The influence of geometric definitions on dune characteristics / L. Scheiber, A. Lefebvre // MARID VII. Seventh International Conference on Marine and River Dune Dynamics. Rennes, France, 3–5 April 2023. — 2023. — Pp. 293–297.
3. Gutierrez R. R. Discrimination of bed form scales using robust spline filters and wavelet transforms: Methods and application to synthetic signals and bed forms of the Río Paraná, Argentina / R. R. Gutierrez, J. D. Abad, D. R. Parsons, J. L. Best // Journal of Geophysical Research: Earth Surface. — 2013. — Vol. 118. — Is. 3. — Pp. 1400–1418. DOI:10.1002/jgrf.20102.
4. Van Rijn L. C. Sediment transport, part III: bed forms and alluvial roughness / L. C. Van Rijn // Journal of hydraulic engineering. — 1984. — Vol. 110. — No. 12. — Pp. 1733–1754. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:12(1733).
5. Знаменская Н. С. Грядовое движение наносов. Теория и практические приложения / Н. С. Знаменская. — Л.: Гидрометеорологическое издательство, 1968. — 188 с.
6. Cisneros J. Dunes in the world's big rivers are characterized by low-angle lee-side slopes and a complex shape / J. Cisneros, J. Best, T. van Dijk, R. P. D. Almeida, M. Amsler, J. Boldt, B. Frietas, C. Galeazzi, R. Huizinga, M. Ianniruberto, H. Ma, J. Nittrouer, K. Oberg, O. Orfeo, D. Parsons, R. Szupiany, P. Wang, Y. Zhang // Nature Geoscience. — 2020. — Vol. 13. — Is. 2. — Pp. 156–162. DOI: 10.1038/s41561-019-0511-7.

7. Барышников Н. Б. Динамика русловых потоков / Н. Б. Барышников. — СПб.: изд. РГГМУ, 2007. — 314 с.
8. Shinohara K. On the Characteristics of Sand Waves Formed upon Beds of the Open Channels and Rivers / K. Shinohara, T. Tsubaki // Reports of Research Institute for Applied Mechanics. — 1959. — Vol. VII. — No. 25. — Pp. 15–45.
9. Swart D. H. Predictive equations regarding coastal transports / D. H. Swart // Proceedings of the Fifteenth Conference on Coastal Engineering. — American Society of Civil Engineers, 1976. — Vol. II. — Pp. 1113–1132. DOI: 10.1061/9780872620834.066.
10. Lefebvre A. Characterising natural bedform morphology and its influence on flow / A. Lefebvre, A. J. Paarlberg, C. Winter // Geo-marine letters. — 2016. — Vol. 36. — Pp. 379–393. DOI: 10.1007/s00367-016-0455-5.
11. Wu S. Riverbed dune morphology of the Lowermost Mississippi River—Implications of leeside slope, flow resistance and bedload transport in a large alluvial river / S. Wu, Y. J. Xu, B. Wang, H. Cheng // Geomorphology. — 2021. — Vol. 385. — Pp. 107733. DOI: 10.1016/j.geomorph.2021.107733.

REFERENCES

1. Gladkov, Gennadii L. and Pachom V. Beljakov. “Sediment transport in rivers: dependence of the dunes parameters on the determining factors.” *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 13.1 (2021): 52–63. DOI: 10.21821/2309-5180-2021-13-1-52-63.
2. Scheiber, L., and A. Lefebvre. “The influence of geometric definitions on dune characteristics.” *MARID VII. Seventh International Conference on Marine and River Dune Dynamics. Rennes, France, 3–5 April 2023*. 2023. 293–297.
3. Gutierrez, Ronald R., Jorge D. Abad, Daniel R. Parsons, and James L. Best. “Discrimination of bed form scales using robust spline filters and wavelet transforms: Methods and application to synthetic signals and bed forms of the Río Paraná, Argentina.” *Journal of Geophysical Research: Earth Surface* 118.3 (2013): 1400–1418. DOI: 10.1002/jgrf.20102.
4. Van Rijn, Leo C. “Sediment transport, part III: bed forms and alluvial roughness.” *Journal of hydraulic engineering* 110.12 (1984): 1733–1754. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(1984)110:12(1733).
5. Znamenskaya, N. S. *Gryadovoe dvizhenie nanosov. Teoriya i prakticheskie prilozheniya*. L.: Gidrometeorologicheskoe izdatel'stvo, 1968.
6. Cisneros, Julia, Jim Best, Thaienne van Dijk, Renato Paes de Almeida, Mario Amsler, Justin Boldt, Bernardo Frietas, Cristiano Galeazzi, Rick Huizinga, Marco Ianniruberto, Hongbo Ma, Jeff Nittrouer, Kevin Oberg, Oscar Orfeo, Dan Parsons, Ricardo Szupiany, Ping Wang, and Yuanfeng Zhang. “Dunes in the world's big rivers are characterized by low-angle lee-side slopes and a complex shape.” *Nature Geoscience* 13.2 (2020): 156–162. DOI: 10.1038/s41561-019-0511-7.
7. Baryshnikov, N. B. *Dinamika ruslovykh potokov*. SPb.: izd. RGGMU, 2007.
8. Shinohara, Kinji, and Toichiro Tsubaki. “On the characteristics of sand waves formed upon the beds of the open channels and rivers.” *Reports of Research Institute for Applied Mechanics* 7.25 (1959): 15–45.
9. Swart, Dirk H. “Predictive equations regarding coastal transports.” *Proceedings of the Fifteenth Conference on Coastal Engineering*. Vol. II. American Society of Civil Engineers, 1976. Pp. 1113–1132. DOI: 10.1061/9780872620834.066.
10. Lefebvre, Alice, Andries J. Paarlberg, and Christian Winter. “Characterising natural bedform morphology and its influence on flow.” *Geo-marine letters* 36 (2016): 379–393. DOI: 10.1007/s00367-016-0455-5.
11. Wu, Shuaihu, Y. Jun Xu, Bo Wang, and Heqin Cheng. “Riverbed dune morphology of the Lowermost Mississippi River—Implications of leeside slope, flow resistance and bedload transport in a large alluvial river.” *Geomorphology* 385 (2021): 107733. DOI: 10.1016/j.geomorph.2021.107733.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Замышляев Виталий Иванович —
кандидат технических наук
ФГБУ «Государственный гидрологический
институт»
199004, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
2-я линия В.О., д. 23
e-mail: viza51@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Zamyshlyayev, Vitaly I. —
PhD
State Hydrological Institute
23 2nd line of Vasilyevsky Island,
St. Petersburg, 199004,
Russian Federation
e-mail: viza51@mail.ru

Статья поступила в редакцию 3 апреля 2024 г.

Received: April 3, 2024.