

METHOD FOR SOLVING THE ISOSTAGE EQUATIONS**A. S. Vas'kov¹, A. A. Mironenko²**¹ — Admiral Ushakov State Maritime University, Novorossisk, Russian Federation² — Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The method for obtaining the vessel fixed position from redundant measurements of one of the main navigation parameters that is distance which is traditionally used in navigation practice in coastal navigation is being under the present research. A new approach to solving the isostages equations based on measured distances to the corresponding pairs of landmarks is reduced to solving equations of straight lines obtained from the intersection points of the corresponding pairs of isolines. These lines are similar to the position lines built along the chords. In contrast to the classical method for the position lines the proposed chord lines directly converge at the fixed position which is obtained from the isolines. The proposed method eliminates the methodological error from replacing the isolines with the position lines and the need for additional iterations. The traditional navigation methods (the theory of isolines, the generalized method for position lines, the least square method) are facilitated as a mathematical framework. The solutions of the original redundant equations for position lines along chords using the least squares method are proposed. Hence, the hypothesis of random errors in measurements and reduced versions of the chords position lines for compensating the systematic errors and assessment of the vessel fixed position by the radial error is advanced. The expressions for estimating systematic errors in measurements for the purpose of their further compensation are given. The principal points of the research are supported by the graphic interpretation, and the given expressions are adjusted to the practical application and navigation systems software development. The formalization of the proposed methods in the automatic navigation or in autonomous ship control systems will enable the navigator on board or at operating the vessel remotely to solve the problems of the navigation information processing by the pair of landmarks in coastal and congested waters on a new level.

Keywords: navigation parameter, distance arc, position line, least squares method, chord method, vessel fix position, radial error.

For citation:

Vas'kov, Anatoliy S., and Aleksandr A. Mironenko. "Method for solving the isostage equations." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 16.2 (2024): 212–223. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-2-212-223.

УДК 656.61.052.4**МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ИЗОСТАДИЙ****А. С. Васьков¹, А. А. Мироненко²**¹ — ФГБОУ ВО «Государственный морской университет имени адмирала Ф. Ф. Ушакова», Новороссийск, Российская Федерация² — ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Исследован метод получения координат обсервованного места судна по избыточным измерениям одного из основных навигационных параметров — дистанции, традиционно используемого в практике судовождения в условиях прибрежного плавания. Новая особенность решения уравнений изолиний — изостадий по измеренным дистанциям до соответствующих пар ориентиров — сводится к решению уравнений прямых, получаемых по точкам пересечения соответствующих пар изолиний. Эти линии аналогичны линиям положения, построенным по хордам. В отличие от классического обобщенного метода касательных линий положения, предлагаемые линии — хорды непосредственно сходятся в точке обсервованного

места судна, получаемой по изолиниям. Предлагаемый метод позволяет исключить методическую погрешность от замены изолиний касательными линиями положения и необходимость дополнительных итераций. В качестве математического аппарата применяются классические методы навигации: теория изолиний, обобщенный метод линий положения, метод наименьших квадратов. Приведены решения исходных избыточных уравнений линий положения по хордам методом наименьших квадратов при гипотезе действия случайных погрешностей измерений и редуцированных вариантов уравнений линий положения — хорд для компенсации систематических погрешностей с оценкой точности наблюдаемого места судна радиальной погрешностью. Предложены выражения для оценки систематических погрешностей в измерениях в целях их дальнейшей компенсации. Основные положения исследования подкреплены инфографикой. Приведенные выражения доведены до уровня непосредственного практического применения в целях разработки программного обеспечения систем навигации. Формализация предлагаемых методов в автоматических навигационных комплексах или системах управления автономными судами позволит судоводителю на борту судна и управляющему им дистанционно решать задачи обработки соответствующей навигационной информации пар ориентиров в прибрежных и стесненных районах плавания на качественно новом уровне.

Ключевые слова: навигационный параметр, изостадия, линия положения, метод наименьших квадратов, метод хорд, наблюдаемое место судна, радиальная погрешность.

Для цитирования:

Васьков А. С. Метод решения уравнений изостадий / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2024. — Т. 16. — № 2. — С. 212–223. DOI: 10.21821/2309-5180-2024-16-2-212-223.

Введение (Introduction)

В исследованиях [1]–[3] выполнен детальный анализ контроля безопасности движения судна по программной траектории (ПТ) в стесненных водах изолиниями измеряемых навигационных параметров (НП) пеленгов и дистанций до ориентиров. Характерные навигационные ориентиры могут выбираться вручную или с помощью специально разработанных программных приложений (например, в современных *ECDIS*). Непрерывные измерения НП навигационных ориентиров могут осуществляться автоматически с помощью РЛС–САРП [1], [4], при этом пары характерно расположенных ориентиров обеспечивают однозначную и надежную их идентификацию [3], [5]–[8].

Для определения координат наблюдаемого места судна (ОМС) необходимо как минимум измерение двух НП. В случае графического решения задача сводится к непосредственному построению изолиний на морской навигационной карте, когда точка пересечения изолиний является искомым ОМС (рис. 1, точка 7). В исследовании [9] рассмотрен вариант решения уравнений изолиний на сфере. Универсальной и фундаментальной основой аналитического решения является обобщенный метод линий положения (ЛП) В. В. Каврайского [10], который заключается в переходе от нелинейных уравнений изолиний НП к ЛП — прямым линиям [2], [3], [5], [7], [11]–[15], т. е. *линеаризации изолиний*. В результате ОМС по изолиниям не совпадает с ОМС по ЛП в силу методической погрешности при замене изолиний ЛП. Для практических целей она опускается, а при необходимости компенсируется применением метода последовательных приближений (нескольких итераций) [2] (см. рис. 1, точки 7 и 8).

При избыточном количестве измерений, для получения координат ОМС, дополнительно решаются задачи уменьшения воздействия случайных и компенсация систематических погрешностей измерений НП [3], [5], [7], [11]–[17]. Избыточно измеренные НП также позволяют минимизировать ошибки оценки навигационной ситуации, дают пространственное понимание положения и движения судна относительно навигационных опасностей.

В практическом судовождении процесс измерения НП (пеленгов и дистанций) с помощью автономных судовых средств навигации (РЛС–САРП) служит важным аспектом для перспективных морских автономных надводных судов (МАНС) в стесненных условиях плавания [1]–[3], т. е. на малых дистанциях до ориентиров.

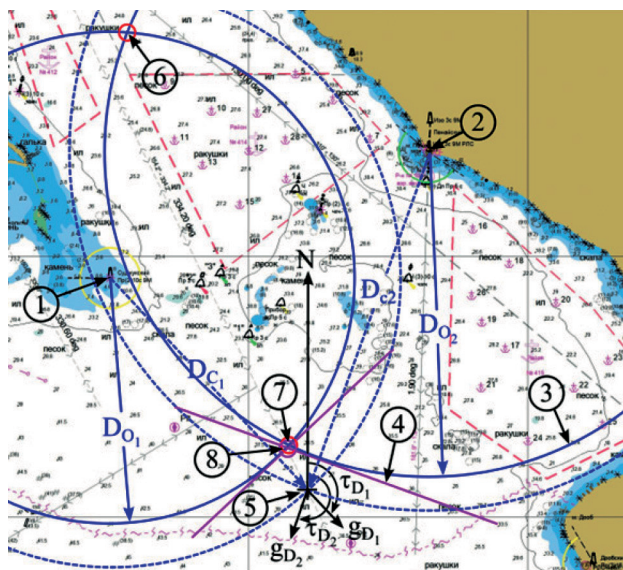


Рис. 1. Демонстрация ОМС по изолиниям и ЛП двух дистанций:

- 1, 2 — навигационные ориентиры; 3 — изолиния дистанции (изостадия); 4 — ЛП;
5 — счислимое место судна; 6 — вторая точка пересечения изолиний; 7 — ОМС по двум изолиниям;
8 — ОМС по двум ЛП; D_{cl} , D_{ol} — соответственно счислимые и наблюдаемые значения дистанций
до ориентиров; t_{D1} , t_{D2} , g_{D1} , g_{D2} — направления и модули градиентов НП

Fig. 1. Demonstration of the vessel fixed position using isolines and position lines of two distances:

- 1, 2 — navigational landmarks; 3 — isoline of distance (isostage); 4 — position line;
5 — dead-reckoning position of vessel; 6 — second point of isolines intersection;
7 — vessel fixed position along two isolines; 8 — vessel fixed position along two position lines;
 D_{cl} , D_{ol} — dead-reckoning values and fixed values of distances to landmarks respectively;
 t_{D1} , t_{D2} , g_{D1} , g_{D2} — directions and modules of navigation parameters gradients

Основной целью настоящего исследования является идея непосредственного аналитического расчета ОМС по изолиниям без использования обобщенного метода ЛП при избыточном количестве основных, традиционно измеряемых НП в судовождении, что позволит исключить методическую погрешность и необходимость итерационной процедуры пересчета для уточнения ОМС.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Измеренные НП: пеленги и дистанции, их комбинации до пары навигационных ориентиров, обеспечивают однозначную их идентификацию [3] и кроме того, дают семь изолиний: окружность (две изостадии по дистанциям и горизонтальному углу; разности двух пеленгов (изогонна)); два изопеленга (по пеленгам); софокусные гипербола (по разностям дистанций) и эллипс (по сумме дистанций) — рис. 2.

На основе классической теории определения координат ОМС, а также исследований авторов [2], [3], [5], [7], [10]–[17] уравнения и свойства изолиний в системе прямоугольных координат, связанных с центром базы пары ориентиров или смещенным центром (при необходимости), можно представить в следующем виде.

1. Изолинии окружностей для НП — дистанций и горизонтального угла:

$$(x_i - x_u)^2 + (y_i - y_u)^2 = R^2; \quad (1)$$

$$R = D_i(D_A, D_B) = \text{const}; \tau_D = \Pi_i 180; g_D = 1; \quad (2)$$

$$R = \frac{d}{2 \sin \gamma}; g_\gamma = 57,3 \frac{d}{D_A D_B}; \gamma = |\Pi_A - \Pi_B| = \text{const}; \tau_\gamma = \Pi_A + \text{arccotg} \frac{D_A \sin \gamma}{D_B - D_A \cos \gamma}, \quad (3)$$

где $x_i, y_i, x_{\text{ц}}, y_{\text{ц}}, R$ — прямоугольные координаты ориентиров, смещения центра и радиус окружности (изолинии, мили);

D_A, D_B, d — соответственно дистанции до ориентиров и базовое расстояние, мили;

Π_A, Π_B, γ — соответственно пеленги на ориентиры, горизонтальный угол между ориентирами, °;

$\tau_D, \tau_\gamma, g_D, g_\gamma$ — соответственно направления и модули градиентов дистанций и горизонтального угла.

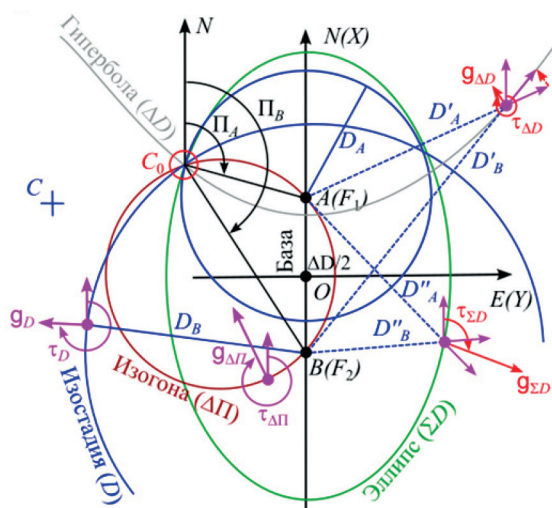


Рис. 2. Изолинии НП пары ориентиров при гипотезе отсутствия (или малости) систематических и случайных погрешностей в измерениях:

XOY — прямоугольная система координат, связанная с базой ориентиров;

N, E — направления на север и восток; C, C_0 — счислимое и наблюдаемое место судна;

$A(F_1), B(F_2)$ — ориентиры (софокусы гиперболы и эллипса);

Π_A, Π_B — пеленги на ориентиры; D_A, D_B — дистанции до ориентиров;

$\Delta D, \Sigma D$ — разность и сумма дистанций до ориентиров; τ_D, g_D — направление и модуль градиентов дистанций; $\tau_{\Delta D}, g_{\Delta D}, \tau_{\Sigma D}, g_{\Sigma D}$ — направление и модуль градиента разности и суммы дистанций

Fig. 2. Isolines of navigation parameters of a pair of landmarks under the hypothesis of the absence (or smallness) of systematic and random errors in measurements:

XOY — rectangular coordinate system associated with a landmarks base; N, E — directions north and east;

C, C_0 — dead-reckoning position and fixed position of the ship;

$A(F_1), B(F_2)$ — landmarks (co-foci of hyperbola and ellipse); Π_A, Π_B — bearings to landmarks;

D_A, D_B — distances to landmarks; $\Delta D, \Sigma D$ — difference and sum of distances to landmarks;

τ_D, g_D — direction and module of distance gradients;

$\tau_{\Delta D}, g_{\Delta D}, \tau_{\Sigma D}, g_{\Sigma D}$ — direction and module of the gradient of the distances difference and sum

2. Изолинии (изопеленги для НП — прямого пеленга на малых дистанциях) — в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом $\Pi_i = (\Pi_A, \Pi_B) = \text{const}$:

$$y_i - y_c = (x_i - x_c) \operatorname{tg} \Pi_{i(A,B)}; g_{n(A,B)} = \frac{57,7^\circ}{D_{A,B}}, \text{ } ^\circ/\text{мили}; \tau_{n(A,B)} = \Pi_i - 90^\circ, \quad (4)$$

где $\tau_{n(A,B)}, g_{n(A,B)}$ — направления и модули градиентов пеленгов, °, °/мили;

x_c, y_c — прямоугольные координаты счислимого места судна (СМС), мили.

3. Изолинии — гиперболы для НП — разности дистанций:

$$\frac{(x - x_{\text{ц}})^2}{a^2} - \frac{(y - y_{\text{ц}})^2}{b^2} = 1; \quad (5)$$

$$a = \frac{\Delta D}{2} = \frac{D_A - D_B}{2} = \text{const}; b = \sqrt{\frac{d^2}{4} - a^2}; e = \frac{d}{2a};$$

$$\tau_{\Delta D} = \Pi_{cp} \pm 90^\circ = \frac{\Pi_A + \Pi_B}{2} \pm 90^\circ; \quad g_{\Delta D} = \left| 2 \sin \frac{w}{2} \right|; \quad w = \Pi_A - \Pi_B, \quad (6)$$

где a, b, e — большая, малая полуоси и эксцентриситет гиперболы;

$\tau_{\Delta D}, g_{\Delta D}$ — направления и модули градиентов разности дистанций, °;

Π_{cp}, w — средний пеленг между ориентирами и базовый угол, °.

4. Изолинии — эллипса для НП — суммы дистанций:

$$\frac{(x - x_u)^2}{a^2} + \frac{(y - y_u)^2}{b^2} = 1; \quad (7)$$

$$a = \frac{D_A + D_B}{2} = \text{const}; \quad b = \sqrt{a^2 - \frac{d^2}{4}}; \quad a > 0,5d > b;$$

$$\tau_{\Sigma D} = \Pi_{cp} \pm 180^\circ = \frac{\Pi_A + \Pi_B}{2} \pm 180^\circ; \quad g_{\Sigma D} = \left| 2 \cos \frac{w}{2} \right|, \quad (8)$$

где $\tau_{\Sigma D}, g_{\Sigma D}$ — соответственно направления и модули градиентов суммы дистанций, °.

Совместное решение разнородных нелинейных уравнений изолиний (1)–(8) требует применения различных методов решения [18], что представляет значительные сложности, поэтому весьма целесообразной является разработка специальных методологических обобщенных подходов их решения, один из которых рассмотрен в данном исследовании.

Результаты и обсуждение (Results and Discussion)

Предлагается заявленную идею аналитического определения координат ОМС обобщенным методом изолиний рассмотреть при измерении НП-дистанций с последующим обобщением на другие НП. Для этого необходимо решить систему нелинейных уравнений изолиний окружностей вида (1). В результате получается две точки ОМС, т. е. *многозначность* (см. рис. 1), которая в практике судовождения устраняется при соблюдении одного из следующих дополнительных условий: известном СМС или нахождении одной из точек ОМС на берегу либо выполнении измерения дополнительного НП, т. е. решении системы трех уравнений изолиний (рис. 3). За центр системы координат можно принять любую точку в районе плавания, однако с учетом традиций судовождения целесообразно использовать полученную по счислению (x_c, y_c) .

Решение уравнений изолиний (1) предлагается искать через уравнения прямых линий, проходящих через точки пересечения двух изолиний (изостадий) — окружностей с центрами в позиции навигационных ориентиров (x_i, y_i) , причем одна из них является искомым ОМС (x_o, y_o) . Эти прямые линии будут перпендикулярны соответствующим базовым линиям между ориентирами по условиям их построения (см. рис. 3 позиции 8, 9) и, следовательно, заменяют отрезок изолинии по методу хорд (вместо касательных ЛП). В отличие от ЛП по методу касательных, прямые — хорды пересекаются именно в точке ОМС (x_o, y_o) по изолиниям, т. е. исключается методическая погрешность от замены изолиний касательными ЛП. Уравнения прямых — хорд можно получить после выполнения следующих преобразований:

$$\left\{ \begin{aligned} ((x_o - x_c) - (x_1 - x_c))^2 + ((y_o - y_c) - (y_1 - y_c))^2 &= D_1^2; \\ ((x_o - x_c) - (x_2 - x_c))^2 + ((y_o - y_c) - (y_2 - y_c))^2 &= D_2^2, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где $x_o, y_o, x_c, y_c, x_i, y_i$ — координаты ОМС, СМС, ориентиров.

Очевидно, что для получения ОМС координатами СМС в уравнениях (9) можно пренебречь:

$$\left\{ \begin{aligned} (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 - D_1^2 &= 0; \\ (x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 - D_2^2 &= 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

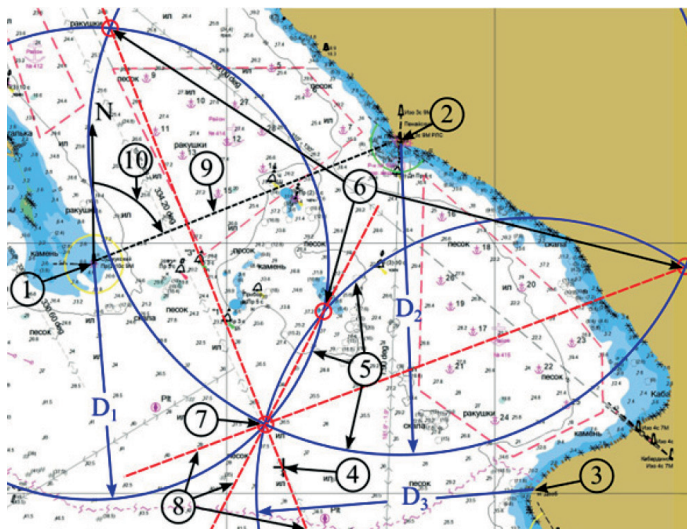


Рис. 3. ОМС по изолиниям трех дистанций:

- 1, 2, 3 — позиции навигационных ориентиров; 4 — СМС; 5 — изолинии дистанций (изостадий);
6 — точки пересечения изолиний, не являющиеся ОМС;
7 — ОМС по трем изолиниям (общая точка пересечения изолиний);
8 — линии, проходящие через обе (две) точки пересечения пар изолиний; 9 — база ориентиров 1 и 2;
10 — направление базы ориентиров 1 и 2; D_1, D_2, D_3 — измеренные НП-дистанции

Fig. 3. Ship fixed position along the isolines of three distances:

- 1, 2, 3 — positions of navigational landmarks; 4 — dead-reckoning position of vessel;
5 — isolines of distances (isostages); 6 — points of isolines intersection that are not fixed positions of vessels;
7 — fixed position of vessel along three isolines (common point of isolines intersection);
8 — lines passing through both (two) points of isolines pairs intersection; 9 — landmarks base of 1 and 2;
10 — direction of 1 and 2 landmarks base; D_1, D_2, D_3 — measured navigation parameters — distances

Приравнивание левых частей уравнений (10), раскрытие разностей квадратов, упрощение и группировка полученных составляющих дает уравнение искомой прямой линии — хорды, представленной в общем виде в индексах и в двух вариантах для любого сочетания пар возможных изолиний (см. рис. 3) — пар ориентиров:

$$2\Delta x_{ij}x_o + 2\Delta y_{ij}y_o = l_{ij}; l_{ij} = (x_i^2 - x_j^2) + (y_i^2 - y_j^2) + (D_i^2 - D_j^2); \quad (11)$$

$$\Delta x_{ij}x_o + \Delta y_{ij}y_o = l_{ij}; l_{ij} = \Delta x_{ij}x_{ijcp} + \Delta y_{ij}y_{ijcp} + \Delta D_{ij}D_{ijcp}; \quad (12)$$

$$\Delta x_{ij} = x_j - x_i; x_{ijcp} = 0,5(x_j + x_i); \Delta y_{ij} = y_j - y_i; y_{ijcp} = 0,5(y_i + y_i);$$

$$\Delta D_{ij} = D_j - D_i; D_{ijcp} = 0,5(D_j + D_i)$$

Следует отметить, что в одном случае коэффициенты уравнений (11) при искомым координатах ОМС зависят от соответствующих разностей координат ориентиров, а свободные члены — от суммы разностей квадратов координат ориентиров и дистанций до них. В другом случае, представленном в виде (12), свободные члены представляют произведения разностей координат ориентиров и дистанций, а также их средних значений.

Уравнение прямой (11) можно представить после преобразований с угловым коэффициентом [18], что следует из прямоугольных треугольников, связывающих координаты ориентиров и определяющих направление базы пары ориентиров (см. рис. 3 позиция 10), с учетом раскрытия разности квадратов дистанций в виде произведения разности и суммы дистанций (измеренных НП):

$$y_o + x_o \operatorname{ctg} \Pi_{ij} = l_{ij}; l_{ij} = x_{ijcp} \operatorname{ctg} \Pi_{ij} + y_{ijcp} + \frac{\Delta D_{ij} \sum D_{ij}}{2\Delta y_{ij}}, \quad (13)$$

где Π_{ij} — направления базовой линии между ориентирами;

x_{ijcp}, y_{ijcp} — средние значения координат пары ориентиров (центра базы).

Для устранения многозначности — пересечения двух изолиний, в частности дистанций, дающих две точки, предлагается систему (10) дополнить уравнением третьей изолинии НП:

$$\left. \begin{aligned} (x_o - x_1)^2 + (y_o - y_1)^2 - D_1^2 &= 0; \\ (x_o - x_2)^2 + (y_o - y_2)^2 - D_2^2 &= 0; \\ (x_o - x_3)^2 + (y_o - y_3)^2 - D_3^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Если отсутствуют систематические и случайные погрешности измерений при парных решениях уравнений системы (14) аналогично (10) и выводах (11) или (13), то получается одна (совместная) точка пересечения всех трех изолиний (координаты ОМС x_o, y_o), совпадающая с пересечением трех прямых линий — хорд (11) или (13), проходящих через обе точки пересечения соответствующих пар изолиний:

$$\left. \begin{aligned} 2\Delta x_{21}x_o + 2\Delta y_{21}y_o &= l_{21}; \\ 2\Delta x_{31}x_o + 2\Delta y_{31}y_o &= l_{31}; \\ 2\Delta x_{32}x_o + 2\Delta y_{32}y_o &= l_{32}; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} y_o + x_o \operatorname{ctg} \Pi_{21} &= l_{21}; \\ y_o + x_o \operatorname{ctg} \Pi_{31} &= l_{31}; \\ y_o + x_o \operatorname{ctg} \Pi_{32} &= l_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Любую пару линейных уравнений систем (15), (16), эквивалентных решению нелинейных систем уравнений изолиний (10), (14), определяющих общую точку пересечения с координатами ОМС по изолиниям НП, можно решить различными методами: Крамера, матричным, Гаусса и др. Например, решение каждой возможной пары уравнений системы (16) можно представить в матричном виде, и координаты полученных трех ОМС будут совпадать (в идеальном случае без погрешностей измерений и вычислений):

$$A_{ij} X = L_{ij}; \quad X = A_{ij}^{-1} L_{ij}; \quad (17)$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} \operatorname{ctg} \Pi_{ij} & 1 \\ \operatorname{ctg} \Pi_{ij} & 1 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}; \quad L_{ij} = \begin{pmatrix} l_{ij} \\ l_{ij} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

При действии погрешностей измерений НП (дистанций) каждая линия (15) или (16) получит смещение и они в общем случае не пересекаются в одной точке, а образуют треугольник погрешностей с координатами, определенными по выражениям (17), (18). Радиальная погрешность ОМС (вершин треугольника погрешностей) по каждой паре изолиний дистанций (14) при одинаковых средних квадратических погрешностях (СКП) измерения дистанций будет соответствовать СКП линий (15), (16) по условиям их построения и определяется выражением [11]–[15]:

$$M_{ij} = \frac{1}{\sin \theta_{ij}} \sqrt{\left(\frac{m_D}{g_D}\right)^2 + \left(\frac{m_D}{g_D}\right)^2} = \frac{m_D}{\sin \theta_{ij}} \sqrt{2}; \quad \theta_{ij} = \Pi_i - \Pi_j, \quad (19)$$

где M_{ij} — радиальная погрешность ОМС (каждой вершины треугольника погрешностей);

$\theta_{ij}, \Pi_i, \Pi_j$ — угол пересечения соответствующих изолиний и пеленги на ориентиры;

m_D, g_D — СКП измерения дистанций и модуль градиента дистанции (2).

Применение метода наименьших квадратов (МНК) в несовместной системе трех уравнений, например, (15), дает систему двух нормальных уравнений искомых вероятнейших координат ОМС, в которых компенсируются влияние случайных погрешностей измерений, а ре-

шение в векторно-матричной форме для любого количества уравнений (11) имеет следующий вид [11]–[15]:

$$PA X = PL; X = (A^T P A)^{-1} A^T P^{-1} L; \quad (20)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_o \\ y_o \end{bmatrix}; A^T = \begin{bmatrix} 2\Delta x_{21} & 2\Delta x_{31} & \dots & 2\Delta x_{ij} \\ 2\Delta y_{21} & 2\Delta y_{31} & \dots & 2\Delta y_{ij} \end{bmatrix}; p_{ij} = 1 / M_{ij}^2;$$

$$A = \begin{bmatrix} 2\Delta x_{21} & 2\Delta y_{21} \\ 2\Delta x_{31} & 2\Delta y_{31} \\ \dots & \dots \\ 2\Delta x_{ij} & 2\Delta y_{ij} \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} l_{21} \\ l_{31} \\ \dots \\ l_{ij} \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} p_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{31} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_{ij} \end{bmatrix},$$

где X — матрица-столбец искоемых вероятнейших координат ОМС;

A, A^T — исходная и транспонированная матрицы коэффициентов уравнений (15);

p_{ij} — веса ОМС по двум изолиниям (вершин фигуры погрешностей);

L — матрица-столбец правых частей уравнений (15);

P, P^{-1} — прямая и обратная матрицы весов уравнений прямых линий (15).

При совместном действии случайных и систематических погрешностей коэффициенты уравнений ЛП (11) редуцируются их средними значениями по принципу применения классических редуцированных уравнений ЛП [3], [13], [15] перед применением МНК. Тогда уравнения (20) с редуцированными коэффициентами могут использоваться при любых типах погрешностей. Элементы векторно-матричных уравнений (20) при совместном действии случайных и систематических погрешностей с редуцированными коэффициентами примут следующий вид:

$$A^T = \begin{bmatrix} \left(2\Delta x_{21} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) & \left(2\Delta x_{31} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) & \dots & \left(2\Delta x_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) \\ \left(2\Delta y_{21} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) & \left(2\Delta y_{31} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) & \dots & \left(2\Delta y_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) \end{bmatrix};$$

$$A = \begin{bmatrix} \left(2\Delta x_{21} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) & \left(2\Delta y_{21} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) \\ \left(2\Delta x_{31} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) & \left(2\Delta y_{31} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) \\ \dots & \dots \\ \left(2\Delta x_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} \right) & \left(2\Delta y_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} \right) \end{bmatrix}; L = \begin{bmatrix} l_{21} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} \\ l_{31} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} \\ \dots \\ l_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Ввиду суперпозиции сумм можно показать, что в каждом слагаемом уравнений (11), (12) будет компенсироваться своя систематическая составляющая погрешностей:

$$l_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} = (x_i^2 - x_j^2) - \frac{(x_i^2 - x_j^2)}{n} + (y_i^2 - y_j^2) - \frac{\sum_{ij=1}^n (y_i^2 - y_j^2)}{n} + (D_i^2 - D_j^2) - \frac{\sum_{ij=1}^n (D_i^2 - D_j^2)}{n};$$

$$l_{ij} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} = \Delta x_{ij} x_{ijcp} - \frac{\sum_{ij=1}^n \Delta x_{ij} x_{ijcp}}{n} + \Delta y_{ij} y_{ijcp} - \frac{\sum_{ij=1}^n \Delta y_{ij} y_{ijcp}}{n} + \Delta D_{ij} D_{ijcp} - \frac{\sum_{ij=1}^n \Delta D_{ij} D_{ijcp}}{n}.$$

Тогда для уравнения (15) после ОМС суммарная систематическая погрешность находится следующим образом:

$$x_o \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta x_{ij}}{n} + y_o \frac{\sum_{ij=1}^n 2\Delta y_{ij}}{n} - \frac{\sum_{ij=1}^n l_{ij}}{n} = \Delta_{ст}, \quad (22)$$

где $\Delta_{ст}$ — систематическая погрешность в измерении НП (дистанций).

Действие систематических погрешностей иначе оценивается из векторного треугольника градиентов НП (дистанций), т. е. через градиенты суммы дистанций (8) [17]. В результате смещение искомой линии (12) на рис. 4 при действии систематических погрешностей находится как проекция градиента суммы дистанций с учетом его направления (8) на направление линии (12) следующим выражением:

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ст} g_{D_{ij}} \cos(\tau_{D_{ij}} - \Pi_{ij} \pm 90^\circ) = \Delta_{ст} g_{D_{ij}} \sin(\Pi_{ср\ ij} - \Pi_{ij}), \quad (23)$$

где Δ_{ij} — смещение искомой линии (12) из-за систематической погрешности в каждом уравнении;

$\Pi_{ср\ ij} - \Pi_{ij}$ — острый угол (позиция 4 на рис. 4) между направлением базы и средним пеленгом с позиции судна на ориентиры, образующими соответствующую базу.

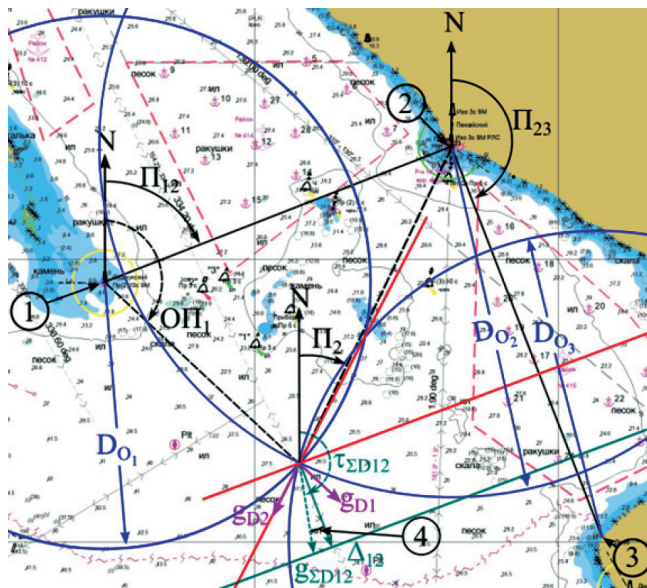


Рис. 4. Действие систематической погрешности при ОМС по изолиниям трех дистанций:

1, 2, 3 — навигационные ориентиры;

4 — острый угол между направлением градиента δ и направлением искомой линии 12, перпендикулярной базе $O\Pi_{12}$

Fig. 4. The effect of systematic error in the ship fixed position along isolines of three distances:

1, 2, 3 — navigational landmarks; 4 — acute angle between gradient direction δ

and the direction of the desired line 12, perpendicular to the base $O\Pi_{12}$

Следовательно, наличие систематических погрешностей в измерениях НП обуславливает необходимость дополнения системы линейных уравнений вида (15) еще одним уравнением для ее определения и компенсации. При совместном действии случайных и систематических погрешностей необходимо выполнить уравнивание измерений с учетом их весов (20), а именно:

$$\left. \begin{aligned} p_{21}x_o \operatorname{ctg} \Pi_{21} + p_{21}y_o + p_{21}\Delta_{21} &= p_{21}l_{21} + \delta_{21}p_{21}; \\ p_{31}x_o \operatorname{ctg} \Pi_{31} + p_{31}y_o + p_{31}\Delta_{31} &= p_{31}l_{31} + \delta_{31}p_{31}; \\ p_{23}x_o \operatorname{ctg} \Pi_{23} + p_{23}y_o + p_{23}\Delta_{23} &= p_{23}l_{23} + \delta_{32}p_{23}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где δ_{ij} — случайные погрешности измерений.

В данном случае согласованное решение системы (24) при минимуме случайных погрешностей сводится к общепринятому решению системы линейных уравнений МНК, определяющих координаты ОМС (x_o, y_o) и систематическую погрешность (Δ_{ij}) прямых линий — хорд (11):

$$X = (A^T P^{-1} A)^{-1} A^T P^{-1} L; \quad X = \begin{bmatrix} x_o & y_o & \Delta_{ij} \end{bmatrix}^T. \quad (25)$$

Таким образом, полученные матричные линейные уравнения (20), (24) представляют результат более простого и универсального аналога решения сложных нелинейных уравнений изолиний (1).

Выводы (Summary)

На основе выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

1. Измерение избыточного количества навигационных параметров нескольких пар ориентиров для определения координат ОМС позволяет однозначно опознавать ориентиры по характерному направлению их базы и дистанции между ними в отличие от использования единственного ориентира. Кроме того, реализация предлагаемого метода в современных технических средствах, в частности *ECDIS*, позволяет получать координаты ОМС по изолиниям НП (дистанциям) без методической погрешности, присущей обобщенному методу линий положения. Данный аспект важен в целях повышения безопасности традиционного и перспективного автономного судовождения в стесненных водах.

2. В перспективе подлежат изучению как проблема наилучшего выбора взаимного расположения пар навигационных ориентиров из возможных вариантов с целью обобщения предлагаемого метода под различные типы навигационных изолиний, так и их комбинаций для повышения точности ОМС, использования различных изолиний НП в качестве ведущих, контрольных и ограждающих в соответствии с конкретным участком ПТ и навигационных условий плавания судна.

3. Актуальным является дальнейшее исследование одновременного использования избыточного количества пар ориентиров для процесса автоматического измерения и сопровождения только пеленгов и дистанций. При этом количество изолиний для определения координат ОМС увеличивается в разы, что обеспечивает наилучшее расположение изолиний (ЛП) относительно опасностей и ПТ соответственно для оперативного контроля движения судна, а также способствует повышению точности и надежности ОМС, безопасности плавания при традиционном и автономном судовождении в стесненных водах.

4. Подлежит дальнейшему изучению проработка концепции планирования и контроля ПТ движения судна в условиях прибрежного плавания в параметрической форме кривыми второго порядка, а именно изолиниями основных навигационных параметров (пеленга, дистанции, их комбинации) как альтернативы координатного принципа ГНСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васьков А. С. Контроль движения судна по навигационным параметрам и параллельным индексам / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени

адмирала С. О. Макарова. — 2022. — Т. 14. — № 6. — С. 826–836. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-826-836.

2. Васьков А. С. Планирование и контроль криволинейной траектории движения судна / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 3. — С. 401–415. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-3-401-415.

3. Васьков А. С. Комбинации изолиний пеленгов и дистанций пары навигационных ориентиров для определения обсервованного места судна / А. С. Васьков, А. А. Мироненко // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 6. — С. 941–950. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-941-950.

4. Bole A. Radar and ARPA Manual Radar, AIS and Target Tracking for Marine Radar Users / A. Bole, A. Wall, A. Norris. — UK, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013. — 552 p.

5. Баранов Ю. К. Навигация / Ю. К. Баранов, М. И. Гаврюк, В. А. Логиновский, Ю. А. Песков. — СПб.: Лань, 1997. — 512 с.

6. Песков Ю. А. Руководство по «Организации мостика» для судов / Ю. А. Песков. — Новороссийск: НГМА, 2002. — Т. 1. — 146 с.

7. Практическое кораблевождение: для командиров кораблей, штурманов и вахтенных офицеров. Кн. 1 / Под ред. А. П. Михайловского. — СПб.: ГУНиО, 1889. — 896 с.

8. Swift A. I. Bridge team management. A Practical Guide / A. I. Swift. — Southall, Meddlesex: O'Sullivan Printing, 2004. — 118 p.

9. Санаев А. И. Аналитическое определение места судна в прибрежной зоне / А. И. Санаев, В. И. Меньшиков, М. А. Пасечников // Вестник МГТУ. Труды Мурманского государственного технического университета. — 2002. — Т. 5. — № 2. — С. 195–202.

10. Каврайский В. В. Избранные труды / В. В. Каврайский. — М.: Изд. УНГС ВМФ, 1956. — Т. 1: Астрономия и геодезия. — 358 с.

11. Афанасьев Б. В. Расчет координат места судна: учеб. пособие по МОС / Б. В. Афанасьев, В. В. Афанасьев, В. А. Логиновский. — СПб.: ГМА им. адм. С. О. Макарова, 2020. — 84 с.

12. Кожухов В. П. Математические основы судовождения / В. П. Кожухов, А. М. Жухлин, В. Т. Кондрашихин, В. А. Логиновский, А. Н. Лукин. — М.: Транспорт, 1993. — 200 с.

13. Васьков А. С. Математические основы судовождения / А. С. Васьков, А. А. Мироненко. — СПб.: Лань, 2023. — 244 с.

14. Груздев Н. М. Оценка точности морского судовождения / Н. М. Груздев. — М.: Транспорт, 1989. — 191 с.

15. Родионов А. И. Автоматизация судовождения / А. И. Родионов, А. Е. Сазонов. — М.: Транспорт, 1992. — 192 с.

16. Логиновский В. А. Оценка вероятности нахождения места судна в геометрической фигуре погрешностей линий положения / В. А. Логиновский // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 2. — С. 161–171. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-2-161-171.

17. Мореходные таблицы (МТ-2000). № 9011. — СПб.: ГУНиО МО РФ, 2002. — 576 с.

18. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1984. — 832 с.

REFERENCES

1. Vas'kov, Anatoliy S., and Aleksandr A. Mironenko. "The ship motion control by navigational parameters and parallel indexes." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 14.6 (2022): 826–836. DOI: 10.21821/2309-5180-2022-14-6-826-836.

2. Vas'kov, Anatoliy S., and Aleksandr A. Mironenko. "Planning and control of the ship curvilinear route." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.3 (2023): 401–415. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-3-401-415.

3. Vas'kov, Anatoliy S., and Aleksandr A. Mironenko. "The bearings and distances isolines combinations of the navigational landmarks pair for the vessel fixed position determination." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.6 (2023): 941–950. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-941-950.

4. Bole, A., A. Wall, and A. Norris. *Radar and ARPA Manual Radar, AIS and Target Tracking for Marine Radar Users*. UK, Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. Baranov. Yu. K., M. I. Gavryuk, V. A. Loginovskii, and Yu. A. Peskov. *Navigatsiya*. SPb.: Lan', 1997.
6. Peskov, Yu. A. *Rukovodstvo po «Organizatsii mostika» dlya sudov*. Vol. 1. Novorossiisk: NGMA, 2002.
7. Mikhailovskii, A.P., ed. *Prakticheskoe korablevozhdenie: dlya komandirov korablei, shturmanov i vakhtennykh ofitserov. Kniga pervaya*. SPb.: GUN i O, 1889.
8. Swift, A. I. *Bridge team management. A Practical Guide*. Southall, Meddlesex: O'Sullivan Printing, 2004.
9. Sanaev, A. I., V. I. Men'shikov, and M. A. Pasechnikov. "Analiticheskoe opredelenie mesta sudna v pribrezhnoi zone." *Vestnik MGTU. Trudy Murmanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* 5.2 (2002): 195–202.
10. Kavraiskii, V. V. *Izbrannye trudy*. Vol. 1. M.: Izd. UNGS VMF, 1956.
11. Afanas'ev, B. V., V. V. Afanas'ev, and V. A. Loginovskii. *Raschet koordinat mesta sudna: Uchebnoe posobie po MOS*. SPb.: GMA im. adm. S. O. Makarova, 2020.
12. Kozhukhov, V. P., A. M. Zhukhlin, V. T. Kondrashikhin, V. A. Loginovskii, and A. N. Lukin. *Matematicheskie osnovy sudovozhdeniya*. M.: Transport, 1993.
13. Vas'kov, A. S., and A. A. Mironenko. *Matematicheskie osnovy sudovozhdeniya*. SPb.: Lan', 2023.
14. Gruzdev, N. M. *Otsenka tochnosti morskogo sudovozhdeniya*. M.: Transport, 1989.
15. Rodionov, A. I., and A. E. Sazonov. *Avtomatizatsiya sudovozhdeniya*. M.: Transport, 1992.
16. Loginovsky, Vladimir A. "Assessment of ship position probability in the geometrical figure of position lines errors." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.2 (2023): 161–171. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-2-161-171.
17. *Morekhodnye tablitsy (MT-2000). № 9011*. SPb.: GUNiO MO RF, 2002.
18. Korn, Granino A., and Theresa M. Korn. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. Dover Publications, 2000.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Васьков Анатолий Семёнович —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «Государственный морской
университет имени адмирала Ф. Ф. Ушакова»
353922, Российская Федерация, г. Новороссийск,
пр. Ленина, 93
e-mail: as.vaskov@mail.ru

Мироненко Александр Анатольевич —
доктор технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация,
г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
e-mail: alex_mironenko@mail.ru,
mironenkoaa@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Vas'kov, Anatoliy S. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Ushakov State Maritime University
93 Lenin Ave.,
Novorossisk, 353918,
Russian Federation
e-mail: as.vaskov@mail.ru

Mironenko, Aleksandr A. —
Dr. of Technical Sciences, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: alex_mironenko@mail.ru,
mironenkoaa@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 15 января 2024 г.
Received: January 15, 2024.