

АВТОМАТИЗАЦИЯ И УПРАВЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ И ПРОИЗВОДСТВАМИ

DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-1085-1095

SYNTHESIS OF SHIP SYSTEMS OPTIMAL REGULATORS BASED ON MATRIX INEQUALITIES

S. O. Baryshnikov, N. M. Vikhrov, V. V. Sakharov

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

The output and state regulators synthesis for ship control systems based on linear matrix inequalities using the CVX software package for solving optimization problems by the method of semi-definite programming is considered. Estimates parameters for regulators providing asymptotically stable systems regimes on Lyapunov inequalities solutions sets are obtained. An algorithm for controlling the ship course using a robust regulator in state feedback, followed by the use of CVX technologies to implement the minimum energy consumption control algorithm, is presented. The control vector estimation is reduced to the minimization of the L2 norm and it is performed in two stages, namely, the best mode is first determined, and then the mode under constraints is defined. The use of Lyapunov inequalities with the calculations implementation in CVX format on proprietary solvers has allowed us to obtain compact program texts and expand the set of restrictions introduced. In the algorithm for solving the boundary value problem of controlling a discrete model of an object, in contrast to existing optimization methods, a mode of transfer from the initial state to the final one with the right boundary, not necessarily equal to zero, is implemented. For a class of observable and controllable time-invariant systems, using the Krylov's function contained in the MATLAB gallery of functions, L2-norms to be minimized are formed. Examples of regulator calculations with a given degree of stability and optimal systems, confirming proposed solutions correctness, are given.

Keywords: vessel, regulators, linear matrix inequalities, solvers, norms, boundary value problem, Krylov subspaces, minimum energy consumption, degree of stability, constraints.

For citation:

Baryshnikov, Sergey O., Nikolai M. Vikhrov, and Vladimir V. Sakharov. "Synthesis of ship systems optimal regulators based on matrix inequalities." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.6 (2023): 1085–1095. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-1085-1095.

УДК 621.398.04

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ СУДОВЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ МАТРИЧНЫХ НЕРАВЕНСТВ

С. О. Барышников, Н. М. Вихров, В. В. Сахаров

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Рассмотрен способ синтеза регуляторов выхода и состояния судовых систем управления на основе линейных матричных неравенств с применением программного пакета CVX для решения задач оптимизации методом полуопределенного программирования. Получены оценки параметров регуляторов, обеспечивающих асимптотически устойчивые режимы систем на множествах решений неравенств Ляпунова. Приведен алгоритм управления курсом судна с помощью робастного регулятора в обратной связи по состоянию с последующим применением CVX-технологий для реализации алгоритма минимального по расходу энергии управления. Оценка вектора управления приведена к минимизации L_2 -нормы и выполнена в два этапа: сначала определен наилучший режим, затем — режим в условиях ограничений. Применение неравенств Ляпунова с реализацией вычислений в формате CVX на собственных решателях позволило получить компактные

тексты программ и расширить множество вводимых ограничений. В алгоритме решения краевой задачи управления дискретной моделью объекта, в отличие от существующих способов оптимизации, реализован режим перевода из начального состояния в конечное с правой границей, не обязательно равной нулю. Для класса наблюдаемых и управляемых инвариантных во времени систем с помощью функции А. Н. Крылова, содержащейся в галерее функций MATLAB, сформированы L_2 -нормы, подлежащие минимизации. Приведены примеры расчетов регуляторов с заданной степенью устойчивости и оптимальных систем, подтверждающие корректность предложенных решений.

Ключевые слова: судно, регуляторы, линейные матричные неравенства, решатели, нормы, краевая задача, подпространства Крылова, минимальный расход энергии, степень устойчивости, ограничения.

Для цитирования:

Барышников С. О. Синтез оптимальных регуляторов судовых систем на основе матричных неравенств / С. О. Барышников, Н. М. Вихров, В. В. Сахаров // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 6. — С. 1085–1095. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-1085-1095.

Введение (Introduction)

Повышение эффективности и качества функционирования систем автоматизации технологических процессов на водном транспорте является важной эксплуатационной задачей, решение которой с применением новых принципов анализа и синтеза оптимальных регуляторов на судах позволит значительно улучшить их поведение в статических и динамических режимах, обеспечить экономию топлива и энергии при заданных показателях устойчивости [1]. Важным и удобным математическим аппаратом для достижения поставленной цели является техника линейных матричных неравенств, решение которых позволяют охватить многие задачи синтеза оптимальных систем на множествах альтернативных вариантов регуляторов выхода и состояния [2]. Приведение билинейных систем матричных неравенств к линейным хорошо коррелируется с численными методами оптимизации в CVX-формате, что значительно упрощает процесс разработки программ в кодах MATLAB и сокращает время проведения машинного эксперимента [3].

Для управления системой с регулятором в обратной связи воспользуемся инвариантной во времени (LTI) моделью в пространстве состояний [4]:

$$\dot{x} = Ax + Bu;$$

$$y = Cx + Du;$$

$$u = -Ky,$$

где матрицы $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{k \times n}$, $D \in R^{k \times m}$. Матрица статического регулятора $K \in R^{m \times n}$.

Если $D = 0$, то целью управления будем полагать расчет оптимального регулятора K , обеспечивающего асимптотическую устойчивость системы с обратной связью с матрицей состояния

$$A_c = A - BKC.$$

Условие асимптотической устойчивости определим с помощью матричного неравенства

$$(A_c^T P + P A_c) < 0, P > 0, \quad (1)$$

где A_c — матрица состояния системы с регулятором;

P — симметричная матрица Ляпунова.

Существование решения соответствует гурвицевой матрице A_c . Примененные обозначения неравенств использованы для оценки знакоопределенности матриц [5].

Методы и материалы (Methods and Materials)

Техника линейных матричных неравенств LMI (Linear Matrix Inequalities) получила необычайно широкое распространение в моделировании динамических систем и в настоящее время стала рабочим инструментом в теории управления [6]. По определению принципиальным свойством линейных матричных неравенств является выпуклость множества его решений [7]. Это позволяет формулировать многие задачи оптимального управления в виде задач выпуклого программиро-

вания [8]. В формате LMI исследуют вопросы асимптотической устойчивости систем путем решения матричного неравенства (1), применяя для моделирования новые интерфейсы с решателями в среде MATLAB, в частности пакеты инструментов CVX [9]. Чтобы получить регулятор K с управлением по вектору выхода y , преобразуем (1) к следующему виду:

$$(A - BKC)^T P + P(A - BKC) < 0, P > 0. \quad (2)$$

В системе (2) переменными являются матрицы P и K . Наличие их произведения в составе неравенства Ляпунова позволяет отнести эту систему к классу билинейных неравенств.

Если в модели динамической системы принять $C = I$, то из условий (2) получим неравенства с регулятором по переменным состояниям:

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) < 0, P > 0, \quad (3)$$

и для обеспечения устойчивости потребуется определить K и P .

Поскольку (3) — билинейное матричное неравенство относительно K и P , необходимо привести его к линейному, для чего введем обозначения [10]:

$$S = P^{-1} \text{ и } Z = KS.$$

Получим структуру LMI:

$$SA^T + AS - Z^T B^T - BZV < 0, S > 0. \quad (4)$$

Рассчитываемые матрицы оценим путем обратных преобразований:

$$P = S^{-1} \text{ и } K = ZP,$$

которые возможны, поскольку P — симметричная матрица, не равная нулю.

Аналогично определим систему матричных неравенств для расчета регулятора выхода, используя билинейное неравенство

$$A^T P + PA - C^T K^T B^T P - PBKC < 0, P > 0. \quad (5)$$

С этой целью введем такую матрицу M , чтобы выполнялись равенства: $BM = PB$ и $N = MK$. Тогда неравенство (5) можно привести к формату LMI следующего вида:

$$A^T P + PA - C^T N^T B^T - BNC < 0, BM = PB, P > 0. \quad (6)$$

В системе (6) компоненты с положительными знаками линейны по P , а с отрицательными — по N . Решение этой системы позволяет получить оценку матрицы M , которую можно инвертировать. Поэтому регулятор выхода

$$K = M^{-1}N. \quad (7)$$

Полученные линейные неравенства (4) и (6) формируют структуру расчета регуляторов замкнутых инвариантных во времени LTI-систем, управляемых по векторам состояния и выхода. Отметим также, что критерии оценки динамических свойств управляемых систем при решении линейных матричных неравенств могут отличаться от традиционно используемых в системах управления [11]. Например, в процессе расчета принято задавать требуемую степень устойчивости числом a , большим нуля, которую должен обеспечить синтезируемый регулятор.

Количественно степень устойчивости $a > 0$ представляет собой для гурвицевой матрицы A расстояние на комплексной плоскости от начала координат до точки на оси абсцисс, где расположено собственное число спектра матрицы замкнутой системы с максимальной действительной частью. Решение LMI должно гарантировать, что по модулю действительная часть этого числа либо действительные части комплексно-сопряженных корней должны быть больше или равны заданной степени устойчивости [12]. Для надежности (робастности) решения в неравенство (6) вводится скалярная величина $a > 0$ в состав аддитивной составляющей матрицы Ляпунова следующего вида: $2aP$.

Задача состоит в нахождении такого регулятора K , который обеспечивает экспоненциальную устойчивость со степенью устойчивости, не меньшей a . В результате сформирована структура

$$A^T P + PA + 2aP - C^T N^T B^T - BNC < 0, BM = PB, P > 0, \quad (8)$$

пригодная для решения широкого класса задач оптимизации на выпуклых множествах численными методами. Согласно (4), синтез регулятора состояния выполним с помощью решения LMI-системы:

$$AS + SA^T + 2aS - BZ - Z^T B^T < 0, S > 0. \quad (9)$$

Регулятор получен по уравнениям $P = S^{-1}$ и $K = ZP$.

Рассмотрим режим работы LTI-системы с квадратичным критерием качества $J = x_0^T S^{-1} x_0 \leq gam$. Регулятор $K = ZP$ такой системы должен гарантировать выполнение условия $J \leq gam$ при начальном условии $x(0) = x_0$. Тогда неравенства для синтеза регулятора будут иметь вид:

$$AS + SA^T + 2aS - BZ - Z^T B^T < 0, S > 0; \quad \begin{bmatrix} gam & x_0^T \\ x_0 & S \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} S & Z^T \\ Z & gam \end{bmatrix} > 0, \quad (10)$$

где блочные матричные неравенства представляют собой дополнение Шура и эллипсоид, внутри которого располагается gam . Синтез регулятора выполним путем решения (10) при минимальном значении gam в кодах CVX по заданной степени устойчивости a и известному вектору начальных условий $x(0)$.

Для решения линейно-квадратичных задач управления дискретными системами целесообразно применять технику, использующую аппарат линейных матричных неравенств совместно с CVX-способами оценки норм погрешности вычислений (Convex Optimization Library) средствами MATLAB. При этом минимум нормы:

$$\|Ax - b\|^2 \text{ при ограничении } lb \leq x \leq ub, \quad (11)$$

удобно оценивать в терминах функций CVX по простому текстовому алгоритму:

```
cvx_begin
variable x(n)
minimize (norm(A*x-b,2))
subject to
lb <= x <= ub
cvx_end
```

Здесь операторы первой и последней строк формируют цикловой процесс, а также определяют его начало и завершение. Операторами определяется область текстового заполнения (в кодах вычислительной среды) условий задачи оптимизации с учетом специфики. Во второй строке объявлен вектор искомой переменной, состоящий из n элементов, в третьей — приведен критерий оптимизации. Далее следуют ограничения на $x(n)$ с указанием нижней lb и верхней ub границ.

Специфика формата CVX состоит в том, что при запуске программы средствами MATLAB сначала проверяется корректность введенных в цикл операций, устанавливается принадлежность неравенств к классу аффинных задач, а затем выполняются вычисления решателями пакета CVX, сформированными из функций среды. Если в строке *minimization* критерием является евклидова норма (11), то решение эквивалентно минимизации, выполненной с помощью квадратичного программирования. При отсутствии ограничений результат вычислений совпадает с оценками $\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$ либо $\hat{x} = A \setminus b$ — операцией левого деления, которые предпочтительно использовать для мониторинга вычислений.

Важное свойство алгоритма в формате CVX, кроме краткой записи скрипт-файлов и файлов-функций в среде MATLAB, состоит в возможности работы с различными нормами, переход к которым выполняется заданием числа k по схеме

minimize (norm(A*x-b, k)).

В системах управления наиболее часто используют нормы со значениями $k = 1, 2, \text{Inf}$. Для ввода нормы Фробениуса применяют термин «fro». Нормы векторов в формате $\text{norm}(X, p)$ оценивают по формуле

$$N = (\sum_1^m \|V_i\|^p)^{1/p}. \quad (12)$$

Альтернативным вариантом решения задачи наименьших квадратов является использование способов минимизации $\|Ax - b\|_1$ и $\|Ax - b\|_\infty$, обеспечивающих минимум нормы Чебышева. С ними связан класс задач выпуклой оптимизации, решаемых методом линейного программирования, переход к которому с применением функции *linprog* выполняется переформатированием исходных данных в формате CVX [14]. Поскольку указанные нормы (12) являются частью базовой библиотеки функций CVX, в этом пакете можно эффективно решать проблемы численной оптимизации с широким спектром вводимых ограничений.

Существуют также другие нормы, не являющиеся частью стандартного дистрибутива MATLAB, которые в формате CVX доступны как обычные функции для вычислений. Список поддерживаемых нелинейных функций в CVX выходит далеко за рамки норм, что позволило получить в работе простые структуры и применить численные алгоритмы оптимизации для управления динамическими объектами с высокой чувствительностью к изменениям параметров и ограничениям.

Результаты (Results)

На первом этапе выполним синтез системы управления курсом судна с применением линейных матричных неравенств. Предложим, что танкерный флот (нефтеналивные суда, газовозы, химовозы, бункеровщики и др.), совершающие обратные балластные или порожние переходы, а также морские и речные суда, работающие на закрепленных грузовых линиях, эксплуатируют, как правило, на двух основных (квазистационарных) режимах: в грузу и балласте. Специфика управления судном на двух рабочих режимах состоит в том, что структура его математической модели не изменяется, а матричные коэффициенты объекта автоматизации сохраняются постоянными на каждом из двух режимов. Тогда исходя из опыта эксплуатации авторулевых, коэффициенты регулятора выхода (состояния) на каждом режиме при моделировании можно полагать постоянными для каждой из двух динамических моделей. Чтобы обеспечить требования устойчивости и свойства робастности системы управления курсом судна, параметры регулятора следует автоматически корректировать во время рейса, для чего целесообразно использовать технику линейных матричных неравенств.

Рассмотрим судно, модель которого представлена матричными уравнениями в пространстве состояний для двух режимов:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2; \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u_i(t), \end{aligned} \quad (13)$$

где, $x_i(t) \in R^n$ — вектор состояния и $u_i(t) \in R$ — управление $A_i \in R^{n \times n}$ и $B_i \in R^{n \times m}$ не изменяемое во времени.

Система (13) полностью управляема для двух режимов. Примем значения $C_i = I$ и $D_i = 0$. Тогда синтез регуляторов состояния можно выполнить, последовательно применив LMI-систему (9): $AS + SA^T + 2aS - BZ - Z^T B^T < 0$ ($S > 0$) и уравнения $P = S^{-1}$, $K = ZP$ для заданной степени устойчивости.

Рассмотрим модель судна, работающего на закрепленной линии. Уравнения динамики в грузу и балласте представим в виде двух систем с матрицами [1]:

– в грузу:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.298 & -0.279 & 0 \\ -4.370 & -0.773 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = [0.116 \quad -0.773 \quad 0]^T;$$

– в балласте:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.428 & -0.339 & 0 \\ -2.939 & -1.011 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = [0.150 \quad -1.011 \quad 0]^T.$$

Здесь $x(t)=[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]'$ — вектор состояния,

где $x_1(t) = \beta(t)$ — угол дрейфа модели судна;

$x_2(t) = \omega(t)$ — угловая скорость по курсу;

$x_3(t) = \varphi(t)$ — курсовой угол;

$u(t) = \delta(t)$ — угол перекладки руля [9].

Перевод модели судна в LTI-формат для вычислений в кодах MATLAB выполним оператором `ss: sys = ss(A, B, C, D)`.

Приведем фрагмент решения с применением линейного матричного неравенства (9) и функций CVX по текстовому алгоритму с решателем *sdp* задач полуопределенного программирования:

```
cvx_begin sdp
a=0.25;
eps=0.0001;
% Размерность переменных
variable S(3,3) symmetric
variable Z(1,3)
% Линейное матричное неравенство с извлечением матриц из объекта sys:
sys.A*S + S*sys.A' + 2*a*S+sys.B*Z + Z'*sys.B' <= -eps*eye(3)
S >= eps*eye(3)
cvx_end
P=inv(S); K = Z*P
```

На рис. 1 приведены переходные процессы, полученные для модели в грузу и балласте с регуляторами, обеспечивающими степени устойчивости 0,25 и 1,0. Результаты расчетов сведены в табл. 1.

Таблица 1

Результаты расчетов для модели судна в грузу и балласте

Модель судна в грузу			
a	Регулятор K	Спектр матрицы A_c	$A_c = A - BK$
0.25	$[-5.8911 \quad 0.8768 \quad 2.3383]$	$-0.9208 + 0.0000i$ $-0.7556 + 1.1407i$ $-0.7556 - 1.1407i$	$-0.9814 \quad -0.1773 \quad 0.2712$ $0.1839 \quad -1.4507 \quad -1.8075$ $0 \quad 1.0000 \quad 0$
1.0	$[-2.5773 \quad 7.0648 \quad 17.4661]$	$-1.0259 + 0.0000i$ $-2.9026 + 2.0317i$ $-2.9026 - 2.0317i$	$-0.5970 \quad 0.5405 \quad 2.0261$ $-2.3777 \quad -6.2341 \quad -13.5013$ $0 \quad 1.0000 \quad 0$
Модель судна в балласте			
a	Регулятор K	Спектр матрицы A_c	$A_c = A - BK$
0.25	$[-3.1821 \quad 0.4196 \quad 1.8039]$	$-0.8014 + 0.0000i$ $-0.7696 + 1.1723i$ $-0.7696 - 1.1723i$	$-0.9053 \quad -0.2761 \quad 0.2706$ $0.2781 \quad -1.4352 \quad -1.8237$ $0 \quad 1.0000 \quad 0$
1.0	$[4.9365 \quad 7.3432 \quad 22.2757]$	$-1.0524 + 0.0000i$ $-3.5351 + 2.4484i$ $-3.5351 - 2.4484i$	$0.3125 \quad 0.7625 \quad 3.3414$ $-7.9298 \quad -8.4349 \quad -22.5207$ $0 \quad 1.0000 \quad 0$

Результаты расчетов свидетельствуют о возрастании требований к регуляторам с увеличением степени устойчивости. При отсутствии ограничений на управление и переменные состояния техника LMI позволяет конструировать регуляторы, обеспечивающие запас устойчивости,

больший заданного, что гарантирует надежность работы системы. Например, при заданном $a = 0,25$ для судна в грузу обеспечивается $a_c = 0.7556$, в балласте эта величина составляет $a_{\text{бал}} = 0.7696$. С увеличением требований к устойчивости и назначении $a = 1.0$ уменьшается время переходного процесса, возрастают нагрузки на элементы системы, на это расходуется энергия. В результате предлагаются регуляторы для более жесткого режима с гарантированными оценками $a_c = 1.0259$ и $a_{\text{бал}} = 1.0524$, близкими к единице. Очевидно, при дальнейшем повышении требований к устойчивости режимы в рамках LMI могут быть не реализованы.

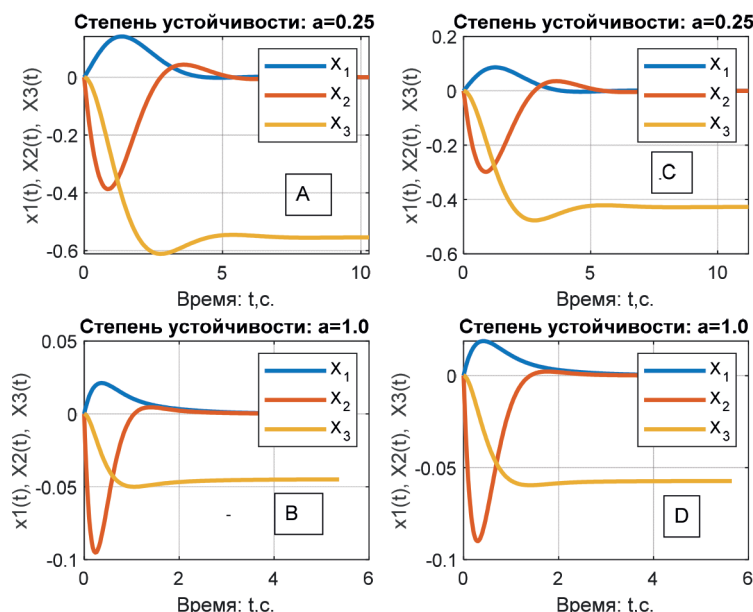


Рис. 1. Переходные процессы в модели судна:
A и B — в грузу; C и D — в балласте

Введем параметр gam , ограничивающий критерий качества $J = x_0^T S^{-1} \leq gam$. Используя линейные матричные неравенства (10), определим минимум скалярной переменной $gam_{\min}$, что позволит получить оценку наименьшего по энергии (в рамках критерия J) управления, реализуемого регулятором K . При введенном ограничении $gam = gam(a)$ система не будет работать, если задать режим $a_1 > a$.

Синтез регулятора K системы управления с ограничением $gam_{\min}$ выполнен методом выпуклого программирования в CVX-формате. Результаты вычислений для пяти значений степени устойчивости представлены построчно в табл. 2. На всех режимах поддерживался вектор начальных условий $x_0 = [0.1 \ -0.1 \ 0.3]^T$.

Таблица 2

Результаты вычислений для пяти значений степени устойчивости

Модель судна в грузу				
a	a_c	Регулятор K	$J_{\min} = x_0^T \cdot S^{-1} \cdot x_0$	$gam_{\min}$
0.25	0.2512	$[-3.6021 \ 0.8778 \ 0.2371]$	0.3832	0.3832
0.50	0.5031	$[-4.7707 \ 1.3537 \ 0.6334]$	0.6256	0.6256
0.75	0.7513	$[-4.7815 \ 1.9940 \ 1.6959]$	1.5150	1.5150
1.0	1.0024	$[-4.0607 \ 2.7477 \ 3.2007]$	2.7287	2.7287
1.25	1.2527	$[-2.6067 \ 3.6143 \ 5.1368]$	4.2687	4.2687

Приведем фрагмент программы поиска $gam_{\min}$, содержащей линейные матричные неравенства (10):

```

cvx_begin sdp
variable S(3,3) symmetric
variable Z(1,3)
variable gam
minimize gam
A*S + S*A' + 2*a*S+B*Z + Z'*B' <= -eps*eye(3)
S >= eps*eye(3)
[gam x0';x0 S]>=0
[S Z';Z gam]>=0
cvx_end

```

На втором этапе выполним оптимальное управление дискретной системой с применением матрицы А. Н. Крылова путем минимизации евклидовой нормы в CVX-формате. Определение оптимального управления дискретной динамической моделью основано на минимизации нормы (12) с показателем $K = 2$. Дискретную модель судна в грузу получим по непрерывной с матрицами (13), приняв шаг дискретности $\text{del} = 0,2$ и выбрав число шагов $N = 80$. Используя оператор преобразования $c2d$, получим:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0.9645 & -0.0506 & 0 \\ -0.7919 & 0.8784 & 0 \\ -0.0817 & 0.1868 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad B_d = \begin{bmatrix} 0.0267 \\ -0.1539 \\ -0.0154 \end{bmatrix};$$

$$C_d = I, \quad D_d = [0 \ 0 \ 0]^T.$$

Дискретную модель $x(k) = A_d x(k-1) + B_d u(k-1)$, $k = 0, 1, \dots, N$ при малом уровне помех нетрудно преобразовать к виду [1]:

$$x(N) - A_d^N x(0) = Kr \cdot U, \quad (14)$$

где Kr — матрица Крылова, образующая подпространство

$$Kr = [A_d^{N-1} B, A_d^{N-2} B, \dots, A_d B, B].$$

Матрица содержится в галерее специальных функций среды MATLAB и используется в работе для формирования подпространства Крылова в следующей редакции:

$$Kr = \text{gallery}('krylov', Ad, Bd, N).$$

Примечание. В уравнении (14) вектор-столбец U — вектор управления.

Для удобства решения задачи в формате CVX воспользуемся принятыми обозначениями: $A = Kr$, $b = x(N) - A_d^N x(0)$, $x = U$. Тогда наилучшая оценка x при отсутствии ограничений на управление определится по алгоритму:

```

m=3; n=80;
cvx_begin
    variable x(n)
    minimize(norm(A*x - b, 2))
cvx_end

```

Полученный минимум евклидовой нормы обеспечивает управление моделью судна с минимальным расходом энергии. Введение любых ограничений на вектор управления приведет к увеличению критерия качества [14]. Такое управление можно найти путем «наилучшей» подгонки искомого решения к уже найденному $x(n)$. С этой целью используем алгоритм:

```

m1=80; b1=x; v=b;
cvx_begin

```

```
variable u(m1)
minimize(norm(u-b1,2))
subject to
u>=-0.15
v==Kr*u
cvx _end
```

На рис. 2 приведены решения краевой задачи по алгоритму в формате CVX. Рассмотрены режимы оптимизации с введенными ограничениями: на управление $u \geq -0.10$ и перевод процесса в момент N в заданное состояние $x(N)$. Вектор начальных условий определен для трех режимов $x(0) = [0.02 \ -0.09 \ 0.04]^T$. Режим без ограничений на управление получен для краевых условий $x(0) = [0 \ 0 \ 0.03]^T$ и $x(N) = [0 \ 0 \ -0.03]^T$. Критерием качества является минимум нормы: $J = \text{norm}([u-b_1])$.

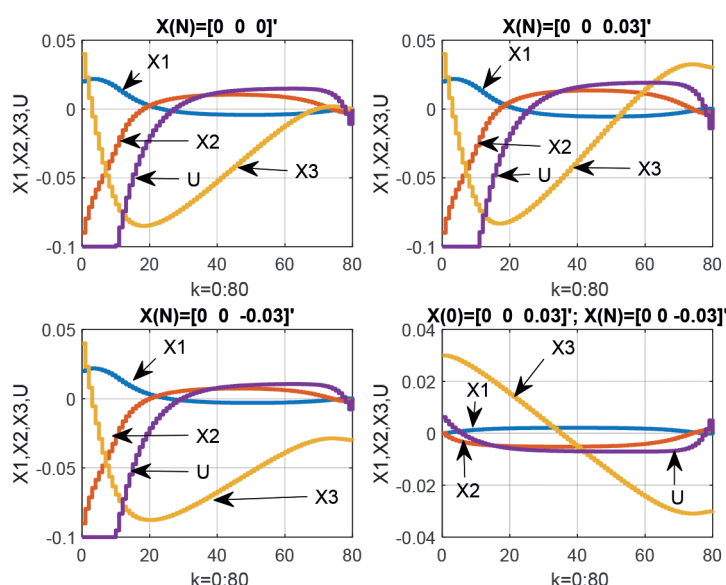


Рис. 2. Траектории судна при минимальном расходе энергии на управление с вектором $x(0) = [0.02 \ -0.09 \ 0.04]^T$ и различными граничными условиями $x(N)$

Для режима с курсовым углом $\varphi(N) = 0$ критерий $J = 0.1711$. Другие оценки:

- угол курса $\varphi(N) = 0.03$ — критерий $J = 0.1816$;
- угол курса $\varphi(N) = -0.03$ — критерий $J = 0.1605$.

При отсутствии ограничений на управление евклидова норма практически равна нулю.

Обсуждение (Discussion)

Современные тенденции поиска новых практических решений в области синтеза оптимальных регуляторов судовых систем управления обращены к мощному математическому аппарату, базирующемуся на теории линейных матричных неравенств, созданной на основе работ А. М. Ляпунова об устойчивости движения [15]. Развитие приложений теории матричных неравенств возможно только с применением вычислительных сред и цифровых систем, в которых требуется выполнение оценок качественных показателей численными методами по различным нормам и многочисленным правилам приведения нелинейных неравенств к линейным формам с достижимыми решениями [16].

Выводы (Summary)

На основе выполненного исследования можно сделать следующие выводы:

1. В работе представлены способ и алгоритм синтеза регуляторов судовых систем на базе теории линейных матричных неравенств.

2. Показано, что на грузовых судах, совершающих обратные балластные или порожние переходы, следует автоматически корректировать параметры регулятора в структуре авторулевого, что позволит повысить управляемость и обеспечить свойства робастности судна на основе LM-технологий.

3. Представлены алгоритмы оптимизации модели судна в конечных разностях по критерию минимума расхода энергии с ограничениями на управление.

4. Приведены примеры синтеза регуляторов, подтверждающие корректность выполненных расчетов в CVX-формате.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барышников С. О. Модели и алгоритмы управления объектами водного транспорта в условиях цифровой трансформации / С. О. Барышников, Д. В. Дмитриенко, В. В. Сахаров, А. А. Чертков. — СПб.: «Заневская площадь», 2022. — 537 с.

2. Поляк Б. Т. Математическая теория автоматического управления: учеб. пособие / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, Л. Б. Рапопорт. — М.: ЛЕНАНД, 2019. — 500 с.

3. Grant M. C. The CVX Users' Guide. Release 2.1 / M. C. Grant, S. P. Boyd. — CVX Research, Inc., 2018. — 99 p.

4. Beck A. Introduction to Nonlinear Optimization: Theory, Algorithms and Applications with MATLAB / A. Beck. — The Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Optimization Society, 2014. — 283 p.

5. Каменецкий В. А. Матричные неравенства в теории устойчивости: новые результаты на основе теоремы о свертывании / В. А. Каменецкий // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 2. — С. 103–121. DOI: 10.31857/S000523102302006X.

6. Поляк Б. Т. Линейные матричные неравенства в системах управления с неопределенностью / Б. Т. Поляк, М. В. Хлебников, П. С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. — 2021. — № 1. — С. 3–54. DOI: 10.31857/S0005231021010013.

7. Глушченко А. И. Адаптивное управление с гарантией экспоненциальной устойчивости. Часть II: Объекты с кусочно-постоянными параметрами / А. И. Глушченко, К. А. Ласточкин // Автоматика и телемеханика. — 2023. — № 3. — С. 65–105. DOI: 10.31857/S0005231023030042.

8. Баландин Д. В. Линейно-квадратичные и γ -оптимальные законы управления по выходу / Д. В. Баландин, М. М. Коган // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 6. — С. 5–14.

9. Баландин Д. В. Оптимальная стабилизация тела в электромагнитном подвесе без изменения его положения / Д. В. Баландин, Р. С. Бирюков, М. М. Коган, А. А. Федюков // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. — 2017. — № 3. — С. 12–24. DOI: 10.7868/S0002338817020044.

10. Хлебников М. В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: I. Задача анализа / М. В. Хлебников // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 2. — С. 46–63. DOI: 10.1134/S000523101902003X.

11. Хлебников М. В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: II. Задача синтеза / М. В. Хлебников // Там же. — № 8. — С. 29–43. DOI: 10.1134/S000523101908004X.

12. Мухин А. В. Синтез статических регуляторов по выходу на основе решения линейных матричных неравенств / А. В. Мухин // Управление большими системами: сб. тр. — 2021. — № 92. — С. 28–42. DOI: 10.25728/ubs.2021.92.2.

13. Balandin D. V. Multi-Objective Robust Generalised H_2 Control / D. V. Balandin, M. M. Kogan // International Journal of Systems Science. — 2020. — Vol. 51. — Is. 10. — Pp. 1873–1882. DOI: 10.1080/00207721.2020.1780512.

14. Ипполитов С. В. Модель управления динамическими объектами / С. В. Ипполитов, О. Н. Чопоров, Д. В. Лопаткин, А. В. Сизов // Моделирование, оптимизация и информационные технологии. — 2017. — № 2 (17). — С. 13.

15. Хлебников М. В. Оптимизация билинейной системы управления при внешних возмущениях: III. Робастная постановка / М. В. Хлебников // Автоматика и телемеханика. — 2020. — № 6. — С. 47–61. DOI: 10.31857/S0005231020060049.

16. CVX: Matlab software for disciplined convex programming [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://cvxr.com/cvx/> (дата обращения: 15.10.2023).

REFERENCES

1. Baryshnikov, S. O., D. V. Dmitrienko, V. V. Sakharov, and A. A. Chertkov. *Modeli i algoritmy upravleniya ob"ektami vodnogo transporta v usloviyakh tsifrovoy transformatsii*. SPb.: «Zanevskaya ploshchad'», 2022.
2. Polyak, B.T., M. V. Khlebnikov, and L. B. Rapoport. *Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya: uchebnoe posobie*. M.: LENAND, 2019.
3. Grant, Michael C., and Stephen P. Boyd. *The CVX Users' Guide*. Release 2.1. CVX Research, Inc., 2018.
4. Beck, Amir. *Introduction to Nonlinear Optimization: Theory, Algorithms and Applications with MATLAB*. The Society for Industrial and Applied Mathematics and the Mathematical Optimization Society, 2014.
5. Kamenetskii, V. A. "Matrichnye neravenstva v teorii ustoychivosti: novye rezul'taty na osnove teoremy o svertyvaniy." *Automation and Remote Control* 2 (2023): 103–121. DOI: 10.31857/S000523102302006X.
6. Polyak, B. T., M. V. Khlebnikov, and P. S. Shcherbakov. "Linear matrix inequalities in control systems with uncertainty." *Automation and Remote Control* 82.1 (2021): 1–40. DOI: 10.1134/S000511792101001X.
7. Glushchenko, A. I., and K. A. Lastochkin. "Adaptivnoe upravlenie s garantiei eksponentsial'noi ustoychivosti. Chast' II. Ob"ekty s kusochno-postoyannymi parametrami." *Automation and Remote Control* 3 (2023): 65–105. DOI: 10.31857/S0005231023030042.
8. Balandin, D. V., and M. M. Kogan. "Linear-quadratic and γ -optimal output control laws." *Automation and Remote Control* 69.6 (2008): 911–919. DOI: 10.1134/S0005117908060027.
9. Balandin, D. V., R. S. Biryukov, M. M. Kogan, and A. A. Fedyukov. "Optimal stabilization of bodies in electromagnetic suspensions without measurements of their location." *Journal of Computer and Systems Sciences International* 56.3 (2017): 351–363. DOI: 10.1134/S1064230717020046.
10. Khlebnikov, M. V. "Optimization of bilinear control systems subjected to exogenous disturbances. I. Analysis." *Automation and Remote Control* 80.2 (2019): 234–249. DOI: 10.1134/S0005117919020036.
11. Khlebnikov, M. V. "Optimization of bilinear control systems subjected to exogenous disturbances. II. Design." *Automation and Remote Control* 80.8 (2019): 1390–1402. DOI: 10.1134/S0005117919080022.
12. Mukhin, A. V. "Synthesis of static output controllers based on the solving of linear matrix inequalities." *Large-Scale Systems Control* 92 (2021): 28–42.
13. Balandin, Dmitry V., and Mark M. Kogan. "Multi-objective robust generalised H_2 control." *International Journal of Systems Science* 51.10 (2020): 1873–1882. DOI: 10.1080/00207721.2020.1780512.
14. Ippolitov, S. V., O. N. Choporov, D. V. Lopatkin, and A. V. Sizov. "Model for control dynamic objects." *Modeling, optimization and information technology* 2(17) (2017): 13.
15. Khlebnikov, M. V. "Optimization of bilinear control systems subjected to exogenous disturbances. III. Robust formulations." *Automation and Remote Control* 81.6 (2020): 1003–1016. DOI: 10.1134/S0005117920060053.
16. CVX: Matlab software for disciplined convex programming. Web. 15 Oct. 2023 <<http://cvxr.com/cvx/>>.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Барышников Сергей Олегович —
доктор технических наук, профессор
ФБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: rector@gumrf.ru
Вихров Николай Михайлович —
генеральный директор
ЗАО «Канонерский судоремонтный завод»
198184, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
Канонерский остров, 41
e-mail: dock@ksz.spb.ru
Сахаров Владимир Васильевич —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
ул. Двинская 5/7
e-mail: _saharov_@rambler.ru, SaharovVV@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Baryshnikov, Sergey O. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: rector@gumrf.ru
Vikhrov, Nikolai M. —
CEO
JSC "KSZ"
41, Kanonersky Island, St. Petersburg, 198184,
Russian Federation
e-mail: dock@ksz.spb.ru
Sakharov, Vladimir V. — Dr. of Technical Sciences,
professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: _saharov_@rambler.ru, SaharovVV@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 13 ноября 2023 г.
Received: November 13, 2023.