

SHEAR BUCKLING OF SHIP STRUCTURES RECTANGULAR ELEMENTS

M. V. Sukhoterin, A. A. Sosnovskaya, N. F. Pizhurina

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

In the work to determine the spectrum of critical loads and the corresponding forms of a rectangular clamped panel (plate) buckling under the action of balanced tangential forces on its contour, the Bubnov-Galerkin method using polynomials in two coordinates is proposed. This problem of the ship skin element pure shift does not have an exact closed solution, and the known approximate solutions require an analysis of their accuracy and reliability. The aim of the work is to obtain and analyze analytical solutions using polynomials of various degrees. Approximating deflection functions satisfying all the boundary conditions of the problem are represented sequentially by polynomials of 10th, 12th, 14th, 16th and 18th degrees in two coordinates with undefined coefficients. The solution of the main differential equation of the problem is found approximately in the integral sense, as a result of which homogeneous systems of linear algebraic equations with respect to unknown coefficients of polynomials are obtained. These systems contain a shear load as a parameter. To obtain eigenvalues (critical loads), the determinants of the systems are equated to zero. Numerical results are obtained in the Maple analytical computing system. For each approximation (polynomial), a power equation with respect to the critical load, the solution of which is paired values differing in signs is obtained. The forms of buckling are oblique waves. For a ship skin square panel, the first form of buckling is a single bulge along the diagonal of the panel. The second form is obtained in the form of two bulges directed in opposite directions (symmetrically-antisymmetrically with respect to the diagonals), etc. The numerical results are compared with the results of other authors. It is established that with an increase in the number of the polynomial terms, the initial critical loads and forms of buckling are specified, first of all.

Keywords: rectangular clamped plate, pure shear, ship skin buckling, polynomials, Bubnov-Galerkin method.

For citation:

Sukhoterin, Mikhail V., Anna A. Sosnovskaya, and Natal'ya F. Pizhurina. "Shear buckling of ship structures rectangular elements." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admiral S. O. Makarova* 15.6 (2023): 1054–1065. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-1054-1065.

УДК 519.6: 629.12

УСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СУДОВЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ

М. В. Сухотерин, А. А. Сосновская, Н. Ф. Пижурин

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

В работе для определения спектра критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости прямоугольной защемленной панели (пластины) под действием уравновешенных касательных усилий на ее контуре предложен метод Бубнова – Галеркина с использованием полиномов по двум координатам. Данная задача чистого сдвига элемента обшивки судна не имеет точного замкнутого решения, а известные приближенные решения требуют анализа их точности и достоверности. Целью настоящей работы является получение и анализ численно-аналитических решений с использованием для последовательных приближений многочленов различной степени. Аппроксимирующие функции прогибов, удовлетворяющие всем граничным условиям задачи, представлены последовательно многочленами 10, 12, 14, 16 и 18 степени по двум координатам с неопределенными коэффициентами. Решение основного дифференциального уравнения задачи находилось приближенно в интегральном смысле, в результате чего были получены однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов полиномов. Эти системы в качестве параметра содержат сдвигающую нагрузку. Для получения собственных чисел (критических нагрузок) определители систем приравнялись нулю. Численные результаты получены в системе

аналитических вычислений *Maple*. Для каждого приближения (многочлена) получено степенное уравнение относительно критической нагрузки, решением которого были парные значения, отличающиеся знаками. Формы потери устойчивости представляли собой косые волны. Для квадратной панели обшивки первой формой потери устойчивости являлась одна выпучина по ее диагонали. Вторая форма была получена в виде двух выпучин, направленных в противоположные стороны (симметрично–антисимметрично относительно диагоналей) и т. д. Выполнено сравнение полученных численных результатов с результатами других авторов. Установлено, что с ростом числа слагаемых полинома уточняются прежде всего начальные критические нагрузки и формы потери устойчивости обшивки судна.

Ключевые слова: прямоугольная защемленная пластина, чистый сдвиг, устойчивость обшивки судна, многочлены, метод Бубнова – Галеркина.

Для цитирования:

Сухотерин М. В. Устойчивость прямоугольных элементов судовых конструкций при чистом сдвиге / М. В. Сухотерин, А. А. Сосновская, Н. Ф. Пижурин // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 6. — С. 1054–1065. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-6-1054-1065.

Введение (Introduction)

Проблема устойчивости защемленной по контуру прямоугольной панели (пластины) под действием сдвиговых (касательных) усилий, равномерно распределенных вдоль защемленных краев, имеет важное значение при проектировании плоских элементов судовых конструкций. Силовым набором обшивка судна, палубный настил, переборки делятся на прямоугольные элементы, которые можно считать защемленными по всем краям. В отличие от задачи устойчивости под действием нормальной контурной нагрузки в плоскости пластины в данной задаче основное дифференциальное уравнение содержит слагаемое с нечетным порядком смешанной производной по каждой координате, что резко усложняет поиск приближенного решения. Определение критической сдвигающей нагрузки является задачей на собственные числа, которая, как и определение собственных частот колебаний, имеет бесчисленное множество решений. Ранее обычно находили лишь первую (эйлерову) критическую нагрузку, которая может привести к разрушению элемента (и, возможно, всей конструкции), т. е. эйлерова нагрузка считалась разрушающей. Однако появление новых материалов, обладающих высокой упругостью, предназначенных для работы в сложных условиях, требует знания некоторого спектра критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости. Пластина при эйлеровой нагрузке может не разрушиться, например, при быстром прохождении или при наличии конструктивных ограничителей ее прогибов. Знание спектра критических нагрузок является актуальным также и при изготовлении различных сенсорных датчиков в приборах управления судном.

Первой работой, в которой была получена эйлерова критическая нагрузка для данной задачи, является статья [1], авторами которой для получения численных результатов был использован метод множителей Лагранжа. В работе [2] аппроксимирующая функция представлена конечной формулой. Приближенное решение получено *энергетическим методом*. Следует отметить обзорный отчет [3] по данной проблеме, который охватывает период с 1948 по 1971 гг. В работе [4] для решения задачи использовался метод дифференциальных квадратур, а в [5] — метод конечных разностей (МКР) в сочетании с методом Галеркина. Метод Бубнова – Галеркина применялся также для решения задачи устойчивости прямоугольной пластины под действием осевой сжимающей нагрузки [6]. Аппроксимирующая функция выбиралась в виде двойного тригонометрического ряда. В работе [7] использована аппроксимирующая функция в конечном виде, содержащая особые выражения синуса и косинуса. Собственные числа находились с использованием энергетического метода и метода дифференциальных квадратур. Проверка осуществлялась с помощью метода конечных элементов (МКЭ) пакета ANSYS. В работе [8] получены первые десять критических нагрузок и форм с помощью двумерного обобщенного метода конечного интегрального преобразования. Для сравнения применялся МКЭ ABAQUS. Статья [9] посвящена анализу деформаций судовых панелей с отверстиями при действии касательных усилий на контуре. Использовалась теория первого порядка

деформации при сдвиге (теория Миндлина). В работе [10] исследовалась устойчивость при сдвиге пластин из функционально-градуированного материала с вырезами. Для решения применялся метод *изопараметрических сплайновых конечных полос*. Статьи [11]–[14] посвящены проблеме устойчивости судовых панелей под действием сжимающих усилий в их плоскости, для решения которой использовались гипербола-тригонометрические ряды. Данная задача устойчивости прямоугольных элементов обшивки судна в условиях чистого сдвига не имеет точного замкнутого решения, а известные приближенные решения требуют анализа их точности и достоверности.

Целью работы является аналитическое решение проблемы, а также проведение на этой основе численных расчетов критических нагрузок и форм потери устойчивости, а также их сравнение с известными результатами.

Постановка задачи (Formulation of the Problem)

Необходимо определить критические значения равномерно распределенных касательных (сдвигающих) усилий S^* , приложенных на контуре защемленной прямоугольной пластины как элемента обшивки (рис. 1), и соответствующие формы потери устойчивости. Пусть $a \times b \times h$ — размеры пластины (h — постоянная толщина). Начало прямоугольной системы координат XOY поместим в один из углов пластины, оси направим по ее сторонам.

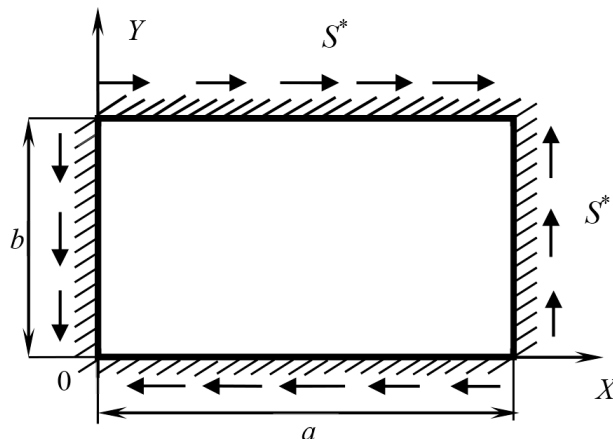


Рис. 1. Защемленная по контуру пластина под действием равномерных сдвигающих усилий

Дифференциальное уравнение изогнутой поверхности при потере устойчивости от касательных усилий имеет вид [15]

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial X^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial X^2 \partial Y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial Y^4} \right) + S^* \frac{\partial^2 w}{\partial X \partial Y} = 0, \quad (1)$$

где $D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]$ — цилиндрическая жесткость пластины;

E — модуль Юнга;

ν — коэффициент Пуассона;

w — прогиб пластины;

$S^* = \text{const}$ — интенсивность касательных сдвигающих усилий.

Введем безразмерные координаты $x = X/b$, $y = Y/b$. Тогда размеры пластины в плане будут $0 \leq x \leq \gamma$, $0 \leq y \leq 1$, где $\gamma = a/b$ — отношение сторон пластины, а дифференциальное уравнение изгиба (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0, \quad (2)$$

где $S = S^*b^2/D$ — относительные (безразмерные) касательные усилия.

Граничные условия на защемленных краях имеют вид:

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, x = \gamma; \quad (3)$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, y = 1. \quad (4)$$

Данная задача является весьма сложной из-за наличия второй смешанной частной производной (при параметре S) в основном уравнении (2). Использование тригонометрических рядов по синусам создает проблемы, связанные с появлением смешанных рядов, содержащих и синусы, и косинусы. Дополнительную сложность вызывают также граничные условия (3), (4).

Методы и материалы (Methods and Materials)

Будем решать задачу методом Бубнова – Галеркина, согласно которому искомая аппроксимирующая функция прогибов, в данном случае выбранная в виде многочлена по двум переменным, должна удовлетворять прежде всего всем граничным условиям задачи (3), (4), что обеспечивалось основным множителем

$$w_0(x, y) = x^2 (3 - x)^2 y^2 (1 - y)^2, \quad (5)$$

стоящим перед дополнительным многочленом с неопределенными коэффициентами a_k :

$$w_*(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_k x^i y^j, \quad (6)$$

где $n = 1, 2, 3, 4, 5$; $k = 1-4, 1-9, 1-16, 1-25, 1-36$. Предполагалось исследовать влияние количества слагаемых в дополнительном многочлене на точность вычислений собственных значений задачи (критических нагрузок) и определить некоторый спектр собственных значений и соответствующих форм потери устойчивости.

Рассматривались следующие приближения:

$$\begin{aligned} w_I(x, y) &= w_0(x, y)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy); \\ w_{II}(x, y) &= w_0(x, y)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2); \\ w_{III}(x, y) &= w_0(x, y)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2 + \\ &\quad + a_{10}x^3 + a_{11}y^3 + a_{12}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3); \\ w_{IV}(x, y) &= w_0(x, y)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2 + a_{10}x^3 + \\ &\quad + a_{11}y^3 + a_{12}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3 + a_{17}x^4 + a_{18}y^4 + a_{19}x^4y + \\ &\quad + a_{20}xy^4 + a_{21}x^4y^2 + a_{22}x^2y^4 + a_{23}x^4y^3 + a_{24}x^3y^4 + a_{25}x^4y^4); \\ w_V(x, y) &= w_0(x, y)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9x^2y^2 + a_{10}x^3 + \\ &\quad + a_{11}y^3 + a_{12}x^3y + a_{13}xy^3 + a_{14}x^3y^2 + a_{15}x^2y^3 + a_{16}x^3y^3 + a_{17}x^4 + a_{18}y^4 + a_{19}x^4y + \\ &\quad + a_{20}xy^4 + a_{21}x^4y^2 + a_{22}x^2y^4 + a_{23}x^4y^3 + a_{24}x^3y^4 + a_{25}x^4y^4 + a_{26}x^5 + a_{27}y^5 + \\ &\quad + a_{28}x^5y + a_{29}xy^5 + a_{30}x^5y^2 + a_{31}x^2y^5 + a_{32}x^5y^3 + a_{33}x^3y^5 + a_{34}x^5y^4 + a_{35}x^4y^5 + a_{36}x^5y^5). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, быстрота сходимости и точность метода Бубнова – Галеркина проверялись в пяти приближениях, когда число членов полинома с неопределенными коэффициентами принималось последовательно равным 4, 9, 16, 25 и 36. Выбор такой последовательности числа членов обусловлен возможностью (в дальнейшем) разделения переменных при получении разрешающей системы линейных алгебраических уравнений.

Согласно методу Бубнова – Галеркина [16] коэффициенты полиномов (7) следует находить из условия

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(\nabla^4 w + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) w_i(x, y) dx dy = 0, \quad (i = 1, \dots, N), \quad (8)$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ — бигармонический оператор;

$w_i = w_0(x, y) \cdot x^i y^j$, $(i, j = 0, \dots, K)$, $(K = 1, \dots, 5)$ — отдельные слагаемые в выражении (7) при соответствующих коэффициентах.

Формула (8) означает, что основное дифференциальное уравнение (2) будет выполнено приближенно в интегральном виде.

Применение метода Бубнова – Галеркина покажем на примере второго приближения w_{II} (7):

$$w(x, y) = x^2 (\gamma - x)^2 y^2 (1 - y)^2 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy + a_5 x^2 + a_6 y^2 + a_7 x^2 y + a_8 xy^2 + a_9 x^2 y^2). \quad (9)$$

Примечание. В данной работе исследовались все пять приближений (7).

В выражении (9) для последующего дифференцирования и интегрирования целесообразно разделить переменные:

$$w(x, y) = F(x) \cdot \Phi(y). \quad (10)$$

При этом

$$F(x) = x^2 (\gamma - x)^2 (A_1 + A_2 x + A_3 x^2); \quad (11)$$

$$\Phi(y) = y^2 (1 - y)^2 (B_1 + B_2 y + B_3 y^2), \quad (12)$$

Здесь неопределенные коэффициенты A_i , B_i связаны с коэффициентами полинома (9) следующими соотношениями:

$$a_1 = A_1 B_1, a_2 = A_2 B_1, a_3 = A_1 B_2, a_4 = A_2 B_2, a_5 = A_3 B_1, a_6 = A_1 B_3, a_7 = A_3 B_2, a_8 = A_2 B_3, a_9 = A_3 B_3. \quad (13)$$

Дифференциальный оператор в формуле (8) с учетом (10)–(12) запишется следующим образом:

$$\nabla^4 w + S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F^{IV}(x) \Phi(y) + 2F''(x) \Phi''(y) + F(x) \Phi^{IV}(y) + SF'(x) \Phi'(y), \quad (14)$$

где выражения для производных имеют вид:

$$F'(x) = 2\gamma^2 A_1 x + (-6\gamma A_1 + 3\gamma^2 A_2) x^2 + (4A_1 - 8\gamma A_2 + 4\gamma^2 A_3) x^3 + (5A_2 - 10\gamma A_3) x^4 + 6A_3 x^5;$$

$$F''(x) = 2[\gamma^2 A_1 + (-6\gamma A_1 + 3\gamma^2 A_2) x + (6A_1 - 12\gamma A_2 + 6\gamma^2 A_3) x^2 + (10A_2 - 20\gamma A_3) x^3 + 15A_3 x^4];$$

$$F^{IV}(x) = 24[A_1 - 2\gamma A_2 + \gamma^2 A_3 + (5A_2 - 10\gamma A_3) x + 15A_3 x^2];$$

$$\Phi'(y) = 2B_1 y + (-6B_1 + 3B_2) y^2 + (4B_1 - 8B_2 + 4B_3) y^3 + (5B_2 - 10B_3) y^4 + 6B_3 y^5;$$

$$\Phi''(y) = 2[B_1 + (-6B_1 + 3B_2) y + (6B_1 - 12B_2 + 6B_3) y^2 + (10B_2 - 20B_3) y^3 + 15B_3 y^4];$$

$$\Phi^{IV}(y) = 24[B_1 - 2B_2 + B_3 + (5B_2 - 10B_3) y + 15B_3 y^2]. \quad (15)$$

Ввиду того, что в искомом решении (11) переменные разделены, двойные интегралы в системе (8) будут представлены также в виде произведения интегралов от каждой переменной. Приведем вычисленные интегралы, которые войдут в преобразованную систему (8):

$$\int_0^\gamma F(x) x^2 (g - x)^2 dx = \frac{\gamma^9 (22A_1 + 11\gamma A_2 + 6\gamma^2 A_3)}{13860}; \quad \int_0^\gamma F(x) x^3 (g - x)^2 dx = \frac{\gamma^{10} (22A_1 + 12\gamma A_2 + 7\gamma^2 A_3)}{27720};$$

$$\int_0^\gamma F(x) x^4 (g - x)^2 dx = \frac{\gamma^{11} (156A_1 + 91\gamma A_2 + 56\gamma^2 A_3)}{360360}; \quad \int_0^\gamma F'(x) x^2 (g - x)^2 dx = \frac{\gamma^9 (A_2 + \gamma A_3)}{1260};$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\gamma} F'(x)x^3(g-x)^2 dx &= \frac{\gamma^9(-11A_1+3\gamma^2A_3)}{13860}; \int_0^{\gamma} F'(x)x^4(g-x)^2 dx = -\frac{\gamma^{10}(11A_1+3\gamma A_2)}{13860}; \\
 \int_0^{\gamma} F''(x)x^2(g-x)^2 dx &= -\frac{\gamma^7(4A_1+2\gamma A_2+\gamma^2A_3)}{210}; \int_0^{\gamma} F''(x)x^3(g-x)^2 dx = -\frac{\gamma^8(12A_1+8\gamma A_2+5\gamma^2A_3)}{1260}; \\
 \int_0^{\gamma} F''(x)x^4(g-x)^2 dx &= -\frac{\gamma^9(66A_1+55\gamma A_2+40\gamma^2A_3)}{13860}; \int_0^{\gamma} F'''(x)x^2(g-x)^2 dx = \frac{2\gamma^5}{35}(14A_1+7\gamma A_2+4\gamma^2A_3); \\
 \int_0^{\gamma} F'''(x)x^3(g-x)^2 dx &= \frac{\gamma^6}{35}(14A_1+12\gamma A_2+9\gamma^2A_3); \int_0^{\gamma} F'''(x)x^4(g-x)^2 dx = \frac{\gamma^7}{35}(8A_1+9\gamma A_2+8\gamma^2A_3); \\
 \int_0^1 \Phi(y)y^2(1-y)^2 dy &= \frac{22B_1+11B_2+6B_3}{13860}; \int_0^1 \Phi(y)y^3(1-y)^2 dy = \frac{22B_1+12B_2+7B_3}{27720}; \\
 \int_0^1 \Phi(y)y^4(1-y)^2 dy &= \frac{156B_1+91B_2+56B_3}{360360}; \int_0^1 \Phi'(y)y^2(1-y)^2 dy = \frac{B_2+B_3}{1260}; \\
 \int_0^1 \Phi'(y)y^3(1-y)^2 dy &= \frac{-11B_1+3B_3}{13860}; \int_0^1 \Phi'(y)y^4(1-y)^2 dy = -\frac{11B_1+3B_2}{13860}; \\
 \int_0^1 \Phi''(y)y^2(1-y)^2 dy &= -\frac{4B_1+2B_2+B_3}{210}; \int_0^1 \Phi''(y)y^3(1-y)^2 dy = -\frac{12B_1+8B_2+5B_3}{1260}; \\
 \int_0^1 \Phi''(y)y^4(1-y)^2 dy &= -\frac{66B_1+55B_2+40B_3}{13860}; \int_0^1 \Phi'''(y)y^2(1-y)^2 dy = \frac{2}{35}(14B_1+7B_2+4B_3); \\
 \int_0^1 \Phi'''(y)y^3(1-y)^2 dy &= \frac{14B_1+12B_2+9B_3}{35}; \int_0^1 \Phi'''(y)y^4(1-y)^2 dy = \frac{8B_1+9B_2+8B_3}{35}.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

С учетом формул (13), (14), (16) из формул (8) после преобразований с использованием вычислительной среды Maple была получена однородная система девяти линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_1, \dots, a_9$ искомой функции прогибов (9), содержащая в качестве параметра сдвиговые усилия S :

$$\begin{aligned}
 &44p_1a_1 + 22p_1\gamma a_2 + 22p_1a_3 + (11p_1\gamma + S \cdot 11\gamma^4/72)a_4 + 4p_2\gamma^2a_5 + 4p_2a_6 + (2p_2\gamma^2 + S \cdot 11\gamma^5/72)a_7 + \\
 &\quad + (2p_3\gamma + S \cdot 11\gamma^4/72)a_8 + (p_4\gamma^2 + S \cdot 11\gamma^5/72)a_9 = 0, \\
 &132p_1a_1 + 8p_5\gamma a_2 + (66p_1 - S \cdot 11\gamma^3/12)a_3 + 4p_5\gamma a_4 + 2p_6\gamma^2a_5 + (12p_3 - S \cdot 11\gamma^3/12)a_6 + \\
 &\quad + (p_6\gamma^2 + S \cdot \gamma^5/4)a_7 + 8p_7\gamma a_8 + (p_8\gamma^2 + S \cdot \gamma^5/4)a_9 = 0; \\
 &132p_1a_1 + (66p_1\gamma - S \cdot 11\gamma^4/12)a_2 + 8p_9a_3 + 4p_9\gamma a_4 + (12p_2\gamma^2 - S \cdot 11\gamma^5/12)a_5 + 2p_{10}a_6 + 8p_{11}\gamma^2a_7 + \\
 &\quad + (p_{10}\gamma + S\gamma^4/4)a_8 + (p_{12}\gamma^2 + S \cdot \gamma^5/4)a_9 = 0; \\
 &(396p_1 + S \cdot 11\gamma^3/2)a_1 + 24p_5\gamma a_2 + 24p_9a_3 + 16p_{13}\gamma a_4 + (6p_6\gamma^2 - S \cdot 3\gamma^5/2)a_5 + (6p_{10} - S \cdot 3\gamma^3/2)a_6 + \\
 &\quad + 4p_{14}\gamma^2a_7 + 4p_{15}\gamma a_8 + (p_{16}\gamma^2 + S \cdot 9\gamma^5/22)a_9 = 0; \\
 &312p_2a_1 + 26p_6\gamma a_2 + (156p_2 - S \cdot 143\gamma^3/12)a_3 + (13p_6\gamma - S \cdot 13\gamma^4/4)a_4 + 16p_{17}\gamma^2a_5 + \\
 &\quad + (78p_4 - S \cdot 143\gamma^3/12)a_6 + 8p_{17}\gamma^2a_7 + (13p_8\gamma - S \cdot 13\gamma^4/4)a_8 + 8p_{18}\gamma^2a_9 = 0; \\
 &312p_3a_1 + (156p_3\gamma - S \cdot 143\gamma^4/12)a_2 + 26p_{10}a_3 + (13p_{10}\gamma - S \cdot 13\gamma^4/4)a_4 + (78p_4\gamma^2 - S \cdot 143\gamma^5/12)a_5 +
 \end{aligned}$$

$$+16p_{19}a_6 + (13p_{12}\gamma^2 - S \cdot 13\gamma^5 / 4)a_7 + 8p_{19}\gamma a_8 + 8p_{20}\gamma^2 a_9 = 0; \quad (17)$$

$$(936p_2 + S \cdot 143\gamma^3 / 2)a_1 + (78p_6\gamma + S \cdot 39\gamma^4 / 2)a_2 + 624p_{11}a_3 + 52p_{14}\gamma a_4 + 48p_{17}\gamma^2 a_5 +$$

$$+ (78p_{12} - S \cdot 39\gamma^3 / 2)a_6 + 32p_{21}\gamma^2 a_7 + (13p_{16}\gamma - S \cdot 117\gamma^4 / 22)a_8 + 8p_{22}\gamma^2 a_9 = 0;$$

$$(936p_3 + S \cdot 143\gamma^3 / 2)a_1 + 624p_7\gamma a_2 + (78p_{10} + S \cdot 39\gamma^3 / 2)a_3 + 52p_{15}\gamma a_4 + (78p_8\gamma^2 - S \cdot 39\gamma^5 / 2)a_5 +$$

$$+ 48p_{19}a_6 + (13p_{16}\gamma^2 - S \cdot 117\gamma^5 / 22)a_7 + 32p_{23}\gamma a_8 + 8p_{24}\gamma^2 a_9 = 0;$$

$$(5148p_4 + S \cdot 1573\gamma^3 / 2)a_1 + (858p_8\gamma + S \cdot 429\gamma^4 / 2)a_2 + (858p_{12} + S \cdot 429\gamma^3 / 2)a_3 +$$

$$+ (143p_{16}\gamma + S \cdot 117\gamma^4 / 2)a_4 + 528p_{18}\gamma^2 a_5 + 528p_{20}a_6 + 88p_{22}\gamma^2 a_7 + 88p_{24}\gamma a_8 + 64p_{25}\gamma^2 a_9 = 0.$$

где $p_1 = 7\gamma^4 + 4\gamma^2 + 7$; $p_2 = 21\gamma^4 + 11\gamma^2 + 22$; $p_3 = 22\gamma^4 + 11\gamma^2 + 21$;

$$p_4 = 24\gamma^4 + 11\gamma^2 + 24$$
; $p_5 = 63\gamma^4 + 44\gamma^2 + 99$; $p_6 = 147\gamma^4 + 110\gamma^2 + 297$;

$$p_7 = 18\gamma^4 + 11\gamma^2 + 27$$
; $p_8 = 84\gamma^4 + 55\gamma^2 + 162$; $p_9 = 99\gamma^4 + 44\gamma^2 + 63$;

$$p_{10} = 297\gamma^4 + 110\gamma^2 + 147$$
; $p_{11} = 27\gamma^4 + 11\gamma^2 + 18$; $p_{12} = 162\gamma^4 + 55\gamma^2 + 84$;

$$p_{13} = 81\gamma^4 + 44\gamma^2 + 81$$
; $p_{14} = 189\gamma^4 + 110\gamma^2 + 243$; $p_{15} = 243\gamma^4 + 110\gamma^2 + 189$;

$$p_{16} = 567\gamma^4 + 275\gamma^2 + 567$$
; $p_{17} = 147\gamma^4 + 130\gamma^2 + 429$; $p_{18} = 84\gamma^4 + 65\gamma^2 + 234$;

$$p_{19} = 429\gamma^4 + 130\gamma^2 + 147$$
; $p_{20} = 234\gamma^4 + 65\gamma^2 + 84$; $p_{21} = 189\gamma^4 + 130\gamma^2 + 351$;

$$p_{22} = 567\gamma^4 + 325\gamma^2 + 819$$
; $p_{23} = 351\gamma^4 + 130\gamma^2 + 189$; $p_{24} = 819\gamma^4 + 325\gamma^2 + 567$;

$$p_{25} = 693\gamma^4 + 325\gamma^2 + 693.$$

Нетривиальные решения системы (17) можно получить, если приравнять нулю ее определитель и найти собственные числа задачи — критические усилия S_i . Подобные преобразования были выполнены для всех приближений (7). Здесь они не приводятся ввиду отсутствия в этом необходимости.

Результаты, обсуждение (Results, discussion)

В качестве примера был рассмотрен квадратный элемент обшивки ($\gamma = 1$). Равенство нулю определителя системы (17) дает биквадратное уравнение относительно параметра S :

$$2,384805S^4 - 4,94859 \cdot 10^5 \cdot S^2 + 2,48858 \cdot 10^{10} = 0, \quad (18)$$

корни которого являются собственными значениями задачи:

$$S_1 = \pm 292,57940; S_2 = \pm 349,14527. \quad (19)$$

Следует заметить, что отрицательные корни, соответствующие противоположному направлению касательных усилий, показанных на рис. 1, в дальнейшем не принимались во внимание. В работах [2], [8] критические усилия отнесены к величине $2\pi^2$. Если значения (19) разделить на это число, то получим соответственно:

$$F_1^* = 14,822; F_2^* = 17,687. \quad (20)$$

где $F^* = Sb^2 / D2\pi^2$.

Для сравнения в работе [2] первое критическое усилие (эйлерово) составило 14,71, в работе [8] первые два критических усилия — 14,642 и 16,918. Расхождение по эйлеровой нагрузке составило 0,74 % и 1,22 % соответственно. По второй критической нагрузке расхождение с работой [8] более заметно — 4,5 %.

В работе [7] с помощью МКЭ при сетке 9×9 были получены значения первой и второй критических нагрузок: 14,801 и 17,307, близкие к результатам настоящей работы. В работе [5] с помощью МКР было получено первое критическое значение 14,735. Следует отметить, что при удержании в аппроксимирующей функции прогибов только четырех слагаемых также были обнаружены и вычислены две критические нагрузки: $F_1^* = 18,004$ и $F_2^* = 25,422$, что свидетельствует о недостаточной точности этого приближения.

В табл. 1 приведены полученные в данном исследовании результаты при использовании функции второго приближения (девяти слагаемых) для первых двух критических значений, а также результаты, полученные авторами других работ. Следует отметить, что большинство исследователей останавливались лишь на эйлеровом значении.

Таблица 1

Первые два критических значения сдвигающих усилий

Критическое значение	Форма относительно диагонали	Полученные результаты в источниках						
		В данном исследовании	[1]	[2]	[4]	[5]	[7]	[8]
F_1^*	$S-S$	14,822	14,64–14,79	14,71	14,68	14,735	14,801	14,642
F_2^*	$A-S$	17,688	–	–	–	–	17,307	16,918

Формы потери устойчивости для полученных критических нагрузок представляли собой косые волны. Первая форма (выпучина) в виде поперечной располагалась по диагонали квадратной пластины (симметричная относительно диагоналей форма), вторая представляла собой две выпучины, параллельные диагонали и направленные в противоположные стороны пластины (антисимметрично-симметричная относительно диагоналей форма).

В работе [7] приведены плоские графики первой и второй форм потери устойчивости, которые совпали с результатами данного исследования. Далее были рассмотрены последующие приближения (7) для 16, 25 и 36 слагаемых. Результаты вычисления критических нагрузок приведены в табл. 2. Для третьего и четвертого приближений (16 и 25 слагаемых) из разрешающего уравнения для критического параметра S были получены по восемь действительных корней (без учета парных отрицательных значений), для пятого приближения (36 слагаемых) — 14 действительных и четыре комплексных корня. Для последнего случая приведены лишь первые десять действительных критических значений. В последних двух строках табл. 2 представлены результаты работы [8], полученные с помощью двумерного обобщенного метода конечных интегральных преобразований и МКЭ. Результаты, полученные МКЭ, были использованы при анализе точности проведенных в данной работе исследований методом Бубнова – Галеркина.

Таблица 2

Критические усилия защемленной по контуру квадратной пластины при чистом сдвиге

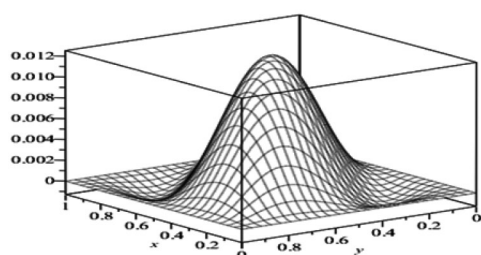
Число членов n , погрешность $\delta, \%$	Относительные критические сдвигающие усилия									
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
$n = 4$	18,004	25,422	–	–	–	–	–	–	–	–
$\delta, \%$	23,0	50,2	–	–	–	–	–	–	–	–
$n = 9$	14,822	17,688	–	–	–	–	–	–	–	–
$\delta, \%$	1,2	4,5	–	–	–	–	–	–	–	–
$n = 16$	14,701	17,052	42,195	46,559	54,092	62,066	104,997	170,787	–	–
$\delta, \%$	0,4	0,8	26,5	31,9	39,7	52,5	104,0	208,6	–	–
$n = 25$	14,651	16,953	35,484	37,827	42,424	45,855	61,729	75,248	–	–
$\delta, \%$	0,05	0,2	6,4	7,2	9,6	12,7	19,9	36,0	–	–
$n = 36$	14,642	16,920	33,960	36,125	39,890	42,305	54,758	61,110	131,804	147,31
$\delta, \%$	0,007	0	1,8	2,3	3,0	3,9	6,4	10,4	83,0	102,0
МКИП [8]	14,642	16,918	33,341	35,295	38,715	40,694	51,472	55,328	71,917	72,793
МКЭ [8]	14,643	16,920	33,345	35,300	38,721	40,701	51,481	55,340	71,936	72,812

Примечание. МКИП — метод конечных интегральных преобразований.

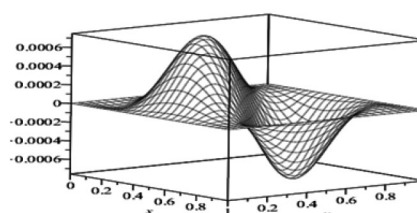
Сравнение соответствующих собственных чисел (критических нагрузок), по мере роста числа слагаемых многочлена с результатами работы [8], показало, что уточняются прежде всего первые собственные числа. Так, при 36 слагаемых первые два числа в точности совпадают с приведенными в работе [8], а расхождение по собственным числам с третьего по шестое составило от 1,8 % до 3,9 %. Далее наблюдалось резкое возрастание расхождения.

На рис. 2 представлены 3D-формы потери устойчивости для первых четырех критических нагрузок при 36 слагаемых в дополнительном многочлене. Формы, приведенные на рис. 2, а, в, симметричны относительно обеих диагоналей пластины, на рис. 2, б, г — симметричны относительно одной диагонали и антисимметричны относительно другой.

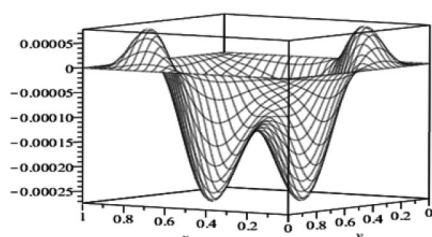
а)



б)



в)



г)

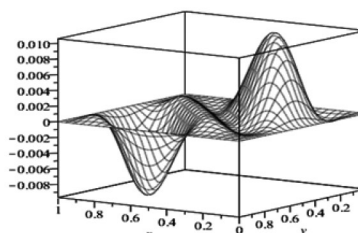


Рис. 2. Потери устойчивости квадратной пластины:

- а — первая форма при сдвигающей нагрузке $F_1 = 14,642$;
- б — вторая форма при сдвигающей нагрузке $F_2 = 16,920$;
- в — третья форма при сдвигающей нагрузке $F_3 = 33,960$;
- г — четвертая форма при сдвигающей нагрузке $F_4 = 36,125$

Полученные формы дают представление о характере деформации элемента обшивки судна (палубного настила, переборок) при потере устойчивости от сдвигающих усилий в процессе эксплуатации судна. Появление подобных косых волн на обшивке и анализ их формы позволяет сделать вывод о величине критических нагрузок, которые могут привести к разрушению данного элемента и всей конструкции.

Заключение (Conclusion)

Метод Бубнова – Галеркина часто используется для приближенного решения многих задач строительной механики судна. Его точность зависит от числа слагаемых в аппроксимирующей функции, которая должна удовлетворять всем граничным условиям задачи, а также от сложности самой краевой задачи. Выбор этой функции в виде полинома по двум координатам приводит к простым операциям дифференцирования и интегрирования и быстро дает приближенное решение при малом количестве слагаемых, однако при их увеличении для достижения более точных результатов сопровождается громоздкими преобразованиями и нуждается в использовании ЭВМ.

В данном случае для получения начального спектра критических сдвигающих усилий и анализа сходимости метода использовались последовательно многочлены 10-й, 12-й, 14-й, 16-й и 18-й степени (число слагаемых в дополнительном многочлене 4, 9, 16, 25 и 36). Вычисления выполнялись в аналитической системе Maple с помощью составленной программы, которая позволяет находить

критические значения и получать соответствующие формы потери устойчивости для защемленных прямоугольных пластин с различным отношением сторон и коэффициентов Пуассона.

Исследования показали, что для получения некоторого спектра критических усилий метод Бубнова – Галеркина сходится недостаточно быстро для собственных чисел с более высокими номерами. Полученные результаты могут быть использованы в проектно-конструкторских организациях судостроения и приборостроения для расчетов на устойчивость прямоугольных плоских элементов различных конструкций при чистом сдвиге.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Budiansky B.* Buckling stresses of clamped rectangular flat plates in shear. Technical Note. No. 1559 / B. Budiansky, R. W. Connor. — Washington: NACA, 1948. — 11 p.
2. *Timoshenko S. P.* Theory of Elastic Stability / S. P. Timoshenko, J. M. Gere. — 2nd edition. International Student Edition. — McGraw-Hill Book Company, 1961. — 541 p.
3. *Johns D. J.* Shear buckling of isotropic and orthotropic plates: a review. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, Ministry of Defense. — London: Her Majesty's Stationery Office, 1971. — 35 p.
4. *Civalek Ö.* Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns / Ö. Civalek // Engineering Structures. — 2004. — Vol. 26. — Is. 2. — Pp.171–186. DOI:10.1016/j.engstruct.2003.09.005.
5. *Lopatin A. V.* Buckling of clamped orthotropic plate in shear / A. V. Lopatin, Y. B. Korbut // Composite Structures. — 2006. — Vol. 76. — Is. 1–2. — Pp. 94–98. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.06.014.
6. *Колмогоров Г. Л.* Применение метода Бубнова-Галеркина для оценки устойчивости анизотропных пластин / Г. Л. Колмогоров, Т. Е. Мельникова, Е. О. Азина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2017. — № 4. — С. 29–33. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-29-33.
7. *Atashipour S. R.* On the shear buckling of clamped narrow rectangular orthotropic plates / S. R. Atashipour, U. A. Girhammar // Mathematical Problems in Engineering. — 2015. — Vol. 2015. — Article ID 569356. DOI: 10.1155/2015/569356.
8. *Ullah S.* New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method / S. Ullah, J. Zhou, J. Zhang, C. Zhou, H. Wang, Y. Zhong, B. Wang, R. Li // International Journal of Structural Stability and Dynamics. — 2020. — Vol. 20. — No. 02. — С. 2071002. DOI: 10.1142/S0219455420710029.
9. *Zhu Z.* Shear buckling of ship plates with different holes / Z. Zhu, X. Li, Q. Chen, Y. Cai // Mechanics & Industry. — 2022. — Vol. 23. — Article Num. 4. DOI: 10.1051/meca/2022004.
10. *Shahrestani M. G.* Elastic and inelastic buckling of square and skew FGM plates with cutout resting on elastic foundation using isoparametric spline finite strip method / M. G. Shahrestani, M. Azhari, H. Foroughi // Acta Mechanica. — 2018. — Vol. 229. — Pp. 2079–2096. DOI: 10.1007/s00707-017-2082-2.
11. *Барышников С. О.* Устойчивость внешних консольных элементов глубоководных аппаратов / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2020. — Т. 12. — № 2. — С. 347–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-347-358.
12. *Сухотерин М. В.* Определение спектра критических нагрузок и форм равновесия сжатых панелей обшивки корпуса судна / М. В. Сухотерин, Е. В. Потехина, Л. В. Анненков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 2 (24). — С. 44–51.
13. *Сухотерин М. В.* Устойчивость сжатых панелей обшивки судна / М. В. Сухотерин, Т. П. Кныш, Л. В. Анненков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2013. — № 2. — С. 51–58.
14. *Барышников С. О.* Потеря устойчивости обшивки судна при сложном изгибе / С. О. Барышников, М. В. Сухотерин // Речной транспорт (XXI век). — 2013. — № 1 (60). — С. 61–65.
15. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. — М.; Л.: ОГИЗ (Гостехиздат), 1947. — 355 с.
16. *Канторович Л. В.* Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. — Л.; М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949. — 695 с.

REFERENCES

1. Budiansky, Bernard, and Robert W. Connor. *Buckling stresses of clamped rectangular flat plates in shear*. Technical Note. No. 1559. Washington: NACA, 1948.
2. Timoshenko, Stephen P., and James M. Gere. *Theory of Elastic Stability*. 2nd edition. International Student Edition. McGraw-Hill Book Company, 1961.
3. Johns, D. J. *Shear buckling of isotropic and orthotropic plates: a review*. Aeronautical Research Council Reports and Memoranda, Ministry of Defense. London: Her Majesty's Stationery Office, 1971.
4. Civalek, Ömer. "Application of differential quadrature (DQ) and harmonic differential quadrature (HDQ) for buckling analysis of thin isotropic plates and elastic columns." *Engineering Structures* 26.2 (2004): 171–186. DOI: 10.1016/j.engstruct.2003.09.005.
5. Lopatin, A.V., and Y. B. Korbut. "Buckling of clamped orthotropic plate in shear." *Composite Structures* 76.1–2 (2006): 94–98. DOI: 10.1016/j.compstruct.2006.06.014.
6. Kolmogorov, G.L., T. E. Melnikova, and E. O. Azina. "Application of the Bubnov-Galerkin method for assessment of stability of non-isotropic plates." *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings* 4 (2017): 29–33. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-29-33.
7. Atashipour, Seyed Rasoul, and Ulf Arne Girhammar. "On the shear buckling of clamped narrow rectangular orthotropic plates." *Mathematical Problems in Engineering* 2015 (2015). DOI: 10.1155/2015/569356.
8. Ullah, Salamat, Jianyu Zhou, Jinghui Zhang, Chao Zhou, Haiyang Wang, Yang Zhong, Bo Wang, and Rui Li. "New analytic shear buckling solution of clamped rectangular plates by a two-dimensional generalized finite integral transform method." *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 20.02 (2020): 2071002. DOI: 10.1142/S0219455420710029.
9. Zhu, Zhaoyi, Xiaowen Li, Qinglin Chen, and Yingqiang Cai. "Shear buckling of ship plates with different holes." *Mechanics & Industry* 23 (2022). DOI: 10.1051/meca/2022004.
10. Shahrestani, Mojtaba G., Mojtaba Azhari, and Hamid Foroughi. "Elastic and inelastic buckling of square and skew FGM plates with cutout resting on elastic foundation using isoparametric spline finite strip method." *Acta Mechanica* 229 (2018): 2079–2096. DOI: 10.1007/s00707-017-2082-2.
11. Baryshnikov, Sergej O., Mikhail V. Sukhoterlin, and Tat'yana P. Knysh. "Stability of external cantilever elements of deep-sea vehicles." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 12.2 (2020): 347–358. DOI: 10.21821/2309-5180-2020-12-2-347-358.
12. Sukhoterlin, Mikhail V., Ekaterina V. Potekhina, and Leonid V. Annenkov. "Determination of the spectrum of critical loads and forms balance compressed cladding panels hull." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 2(24) (2014): 44–51.
13. Sukhoterlin, Mikhail V., Tat'yana P. Knysh, and Leonid V. Annenkov. "Stability of ship's plating compressed panels." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* (2013): 51–58.
14. Baryshnikov, S., and M. Sukhoterlin. "The loss of ship's cover stability in complex bend." *River transport (XXI century)* 1(60) (2013): 61–65.
15. Lekhnitsky, S. G. *Anisotropic plates*. Gordon & Breach, New York, 1968.
16. Kantorovich, L.V., and V. I. Krylov. *Approximate methods of higher analysis*. Translated from the 3rd Russian Edition by C. D. Benster. Groningen, Noordhoff, 1958.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Сухотерин Михаил Васильевич —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: sukhoterlinmv@gumrf.ru
Сосновская Анна Анатольевна —
старший преподаватель
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: sosnovskayaaa@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Sukhoterlin, Mikhail V. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: sukhoterlinmv@gumrf.ru
Sosnovskaya, Anna A. —
Senior lecturer
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: sosnovskayaaa@gumrf.ru

Пижурина Наталья Федоровна —
кандидат технических наук, доцент
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: pizhurinanf@gumrf.ru

Pizhurina, Natal'ya F. —
PhD, associate professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg 198035,
Russian Federation
e-mail: pizhurinanf@gumrf.ru

*Статья поступила в редакцию 2 октября 2023 г.
Received: October 2, 2023.*