

ЭКСПЛУАТАЦИЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА, ВОДНЫЕ ПУТИ СООБЩЕНИЯ И ГИДРОГРАФИЯ

DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-2-161-171

ASSESSMENT OF SHIP POSITION PROBABILITY IN THE GEOMETRICAL FIGURE OF POSITION LINES ERRORS

V. A. Loginovsky

Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping,
St. Petersburg, Russian Federation

Accurate and reliable determination of the ship position coordinates is one of the most important tasks for ensuring the safety of navigation at sea. A significant condition that contributes to the effective solution of this task is the use of redundancy in measurements of navigation parameters. The implementation of this redundancy allows the navigator or automatic navigation aid to control the trueness of measurements; eliminate gross and systematic errors; reduce the effect of random errors; apply various methods of analysis and algorithms for processing information in order to obtain the most accurate and reliable ship position. Adequate redundancy of navigation measurements makes it possible to obtain asymptotically unbiased estimates of coordinates, as well as to solve other navigation tasks based on redundant data. The results of a study on the probability of finding the true coordinates of the ship's position in a geometric figure formed by random measurement errors are presented. It has been shown in the study that a single redundancy of measurements is not enough to achieve the required level of probability. Elements of classical combinatorics based on the Bernoulli scheme and including Newton's binomial and Pascal's triangle as tools are used as a mathematical apparatus for the study. These tools allow us to effectively analyze combinations of mathematical signs, such as plus and minus, of random measurement errors, reducing them into binary sequences, which are described by binomial coefficients. It has been argued in the paper that the low level of probability of finding the true values of the coordinates in the geometrical figure of measurement errors is a strong signal that any method of averaging the measurement results can lead to asymptotically biased estimates of the ship position coordinates. This is analogous to the influence of systematic errors on the coordinates within a certain time interval. From the point of view of navigational safety, a low probability can be qualified as a near-miss situation, which can lead to incorrect control of the ship position. The probabilistic criteria for the necessary redundancy of measurements to approach asymptotically unbiased estimates of ship position are presented in the paper.

Keywords: ship position, probability, geometrical figure of errors, confidence interval, measurement redundancy.

For citation:

Loginovsky, Vladimir A. "Assessment of ship position probability in the geometrical figure of position lines errors." *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S. O. Makarova* 15.2 (2023): 161–171. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-2-161-171.

УДК 527.62

ОЦЕНКА ВЕРОЯТНОСТИ НАХОЖДЕНИЯ МЕСТА СУДНА В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФИГУРЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ЛИНИЙ ПОЛОЖЕНИЯ

В. А. Логиновский

ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова»,
Санкт-Петербург, Российская Федерация

Отмечается, что одним из ключевых условий, способствующих эффективному решению задачи определения места судна, является применение избыточности измерений навигационных параметров. Реализация этой избыточности позволяет судоводителю или автоматическому навигационному средству осуществлять контроль правильности измерений, исключать грубые и систематические погрешности, уменьшать влияние случайных погрешностей и применять различные методы анализа и алгоритмы обработки информации с целью получения наиболее точных и надежных координат места судна. Адекватная

избыточность навигационных измерений позволяет получать асимптотически несмещенные оценки координат, а также решать другие задачи навигации, основанные на избыточных данных. В статье приведены результаты исследования оценки вероятности нахождения истинных координат места судна в геометрической фигуре, сформированной случайными погрешностями измерений при их различной избыточности. Показано, что единичной избыточности измерений недостаточно для достижения необходимого уровня вероятности, а также сделаны выводы, позволяющие обобщить полученные результаты для линейных пространств любых размерностей, используемых в задачах расчета координат места судна. В качестве математического аппарата для проведения исследования были использованы элементы классической комбинаторики, основанные на схеме Бернулли и включающие в качестве инструментов бином Ньютона и треугольник Паскаля. Эти инструменты позволяют эффективно анализировать комбинации математических знаков случайных погрешностей измерений, сводя их в бинарные последовательности, описываемые биномиальными коэффициентами. В статье приводится доказательство того, что низкий уровень вероятности нахождения истинных значений координат в фигуре погрешностей является сигналом о том, что использование любых методов осреднения результатов таких измерений может привести к асимптотически смещенным оценкам координат места судна, т. е. к влиянию на координаты систематических погрешностей измерений, действующих в пределах некоторого временного интервала. Отмечается, что с точки зрения навигационной безопасности низкая вероятность может квалифицироваться как потенциально-опасная ситуация, способствующая возникновению некорректного контроля за местом судна и неадекватному принятию решений. Приводятся вероятностные критерии необходимой избыточности измерений для приближения к оценке асимптотически несмещенных координат места судна.

Ключевые слова: определение места судна, вероятность, фигура погрешностей, доверительный интервал, избыточность измерений.

Для цитирования:

Логиновский В. А. Оценка вероятности нахождения места судна в геометрической фигуре погрешностей линий положения / В. А. Логиновский // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2023. — Т. 15. — № 2. — С. 161–171. DOI: 10.21821/2309-5180-2023-15-2-161-171.

Введение (Introduction)

Неудовлетворительный контроль за местом нахождения судна, а также навигационные ошибки и неверная интерпретация измеренных данных являются наиболее распространенными причинами посадок на мель и касаний грунта [1]–[3]. В публикации [4] рассмотрены некоторые идеи интерпретации избыточных измерений навигационных параметров с точки зрения оценки вероятности нахождения истинного (эталонного) положения места судна в фигуре, образованной случайными погрешностями измерений. В данном исследовании, которое является продолжением темы указанной публикации, сформулированы дополнения, уточнения и разъяснения применения техники комбинаторного анализа к оценке вероятности комбинаций случайных погрешностей при избыточных измерениях.

Объектом исследования является фигура погрешностей, формируемая несовместной нормированной системой линейных уравнений навигационных функций, применяемых для расчета координат места судна:

$$A\Delta X = \Delta U. \quad (1)$$

Здесь A — $(m \times n)$ -матрица коэффициентов линейных уравнений навигационных функций в истинной точке нахождения судна; ΔU — m -мерный вектор измерений; ΔX — n -мерный вектор искомых приращений координат относительно точки линеаризации, за которую принимается истинная (эталонная) точка.

Сделано предположение, что матрица A в некоторой окрестности эталонной точки линеаризации практически постоянна, а вектор ΔU в такой постановке задачи состоит из случайных погрешностей измерений. В соответствии с терминологией источника [5] столбцы матрицы A образуют линейное n -мерное пространство решений системы (1), а вектор ΔU определяет m -мерное пространство измерений. При $m > n$ пространство решений данной системы является *подпространством пространства измерений*. Под избыточностью измерений r будем понимать превышение размерности вектора измерений навигационных параметров m над числом искомых координат n , т. е. $r = m - n$.

Графической интерпретацией системы (1) при $r = 1$ в пространстве решений любой размерности является простейшая фигура — *симплекс погрешностей*, формируемый наличием погрешностей измерений в векторе ΔU : при $n = 1$ — это отрезок прямой линии (1-симплекс), при $n = 2$ — треугольник (2-симплекс), при $n = 3$ — тетраэдр (3-симплекс) и т. д., а обобщением является n -симплекс. При $r > 1$ фигура погрешностей становится более сложной, и в соответствии с терминологией публикаций [6], [7] представляет собой r -комплекс, состоящий из n -симплексов. Например, в задаче расчета координат места судна при $m = 4$ и $n = 2$ фигура погрешностей образуется четырьмя линиями положения (2-комплекс), которая состоит из треугольников (2-симплексов).

Формально задача исследования заключается в оценке вероятности P попадания истинного вектора ΔX , включающего координаты точки положения места судна, в фигуру, образованную вследствие влияния случайных погрешностей измерений навигационных параметров. В данной статье эта фигура погрешностей рассматривается как *текущий достоверный интервал*, в котором с определенной вероятностью P находятся истинные координаты вектора ΔX . Согласно работе [8], указанная вероятность может являться одним из критериев *надежности* определения координат места судна.

Методы и материалы (Methods and Materials)

Избыточные измерения в одномерном пространстве решений (прямая, $n = 1$). Рассмотрим гипотетический пример, представленный на рис. 1¹: из некоторой истинной (эталонной) точки C , в которой находится судно, выполнено двукратное измерение дистанции D до навигационного ориентира B .

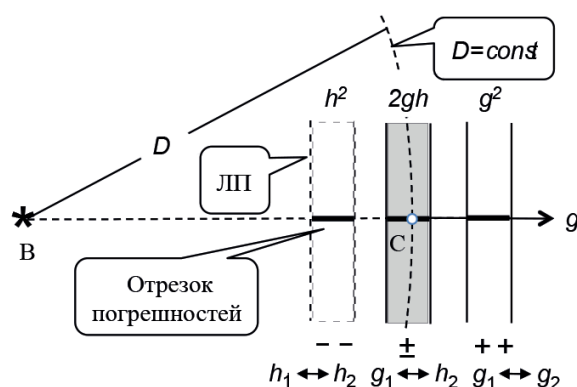


Рис. 1. Отрезки погрешностей при возможных сочетаниях знаков погрешностей линий положения

Предположим, что систематические погрешности измерений отсутствуют, что дает возможность оценить среднее значение величины D при $r = 1$. Случайные погрешности приводят к образованию простейшей фигуры погрешностей, которая в данном случае является отрезком нормали к навигационной изолинии. Отрезок погрешностей (1-симплекс) создает неопределенность для оценки величины D , которая может быть оценена вероятностью P нахождения истинного значения D в полученном отрезке. Обозначим положительные случайные погрешности соответствующих линий положения (ЛП) по направлению градиента символом g , а отрицательные — символом h , не определяя их численных значений.

На рис. 1 символами g_1, h_1 обозначены возможные математические знаки погрешностей ЛП₁, сопутствующие первому измерению дистанции D , а символами g_2, h_2 — случайные погрешности ЛП₂. Далее для удобства изложения материала освободимся от подстрочных индексов. Тогда в результате двукратного измерения навигационного параметра D возможно образование следующих комбинаций символов g и h : gg, gh, hg, hh . Такая последовательность комбинаций аналогична

¹ Пример приведен исключительно для единообразия дальнейшего изложения материала.

результатам работы генератора случайных сигналов в известной задаче из теории вероятностей о подбрасывании двух монет. Естественно считать, что в результате измерений с единичной избыточностью эталонное значение D окажется внутри отрезка погрешностей только в случае выпадения комбинаций символов gh или hg . Комбинации gg и hh не покрывают истинную точку C .

Как показано в работах [9] и [10], при $r = 1$ количество возможных комбинаций k из символов g и h в рассматриваемом примере описывается с помощью формулы бинома Ньютона второго порядка:

$$(g + h)^2 = g^2 + 2gh + h^2 = gg + gh + hg + hh. \quad (2)$$

Здесь $k = 2^m = 4$ (m — количество измерений).

Поэтому теоретическая вероятность попадания истинного значения D в отрезок погрешностей $P = 2/4 = 0,5$. При $r = 2$ (добавляется ЛП₃) повышается также уровень вероятности попадания истинного значения D в более сложную фигуру, формируемую множеством отрезков погрешностей. В этом случае количество комбинаций символов g и h описывается с помощью формулы бинома Ньютона третьего порядка:

$$(g + h)^3 = g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3 = ggg + ggh + hgg + ghg + hhg + ghh + hgh + hhh, \quad (3)$$

а соответствующая вероятность оценивается как $P = 6/8 = 0,75$. Очевидно, что при $n = 1$ вероятность P будет расти при увеличении избыточности измерений и может быть определена по формуле

$$P = (k - 2) / k, \quad (4)$$

где $k = 2^m$ — количество размещений с повторениями по формуле бинома Ньютона m -порядка; m — количество измерений.

Избыточные измерения в двумерном пространстве решений (плоскость, $n = 2$). Определение места судна относительно навигационных опасностей, каким бы способом оно не осуществлялось, входит в категорию самых важных задач судовождения, обеспечивающих безопасность мореплавания. *Хорошая морская практика* рекомендует для контроля процедуры определения координат обсервованной точки применять *избыточные измерения*. В практике классической навигации наиболее часто используются измерения навигационных параметров (НП) с единичной избыточностью. Из-за влияния погрешностей измерений на карте образуется некоторая область, ограниченная сторонами треугольника погрешностей, что является геометрической интерпретацией системы уравнений (1), а также аналогом *доверительного интервала*, в пределах которого может находиться место судна с определенной вероятностью P .

Исходя из предположения, что измерения отягощены только случайными погрешностями, для нахождения координат места судна систему (1) решают либо аналитически с помощью метода наименьших квадратов, либо графоаналитически, выполняя прокладку линий положения на навигационной карте или специальном планшете, либо не используют данную систему уравнений, осуществляя прокладку соответствующих изолиний на навигационной карте. В любом случае обсервованную точку определяют внутри образовавшегося треугольника. Вопрос состоит в том, *какова вероятность P нахождения истинной (эталонной) точки положения судна в этом треугольнике.*

Рассмотрим следующую ситуацию: примем начало прямоугольной декартовой системы координат в известной истинной точке C нахождения судна. Предположим, что координаты точки получены с помощью высокоточных средств навигации и поэтому могут использоваться как эталон для анализа качества других менее точных измерений, выполняемых для определения места судна. Точка C используется как опорная точка для формирования системы уравнений (1). Допустим, что в этой точке измерены три НП при условии, что их результаты отягощены только случайными погрешностями, которые при наличии положительных и отрицательных значений могут образовывать треугольники погрешностей различных размеров и ориентации. Для упрощения анализа комбинаций математических знаков погрешностей трех измерений распределим градиенты соответствующих навигационных функций в истинной точке равномерно по горизонту (рис. 2), принимая, что горизонтальная координатная линия является отрезком параллели, которая делит координатную плоскость на полуплоскости. Здесь направления градиентов навигационных функций обозначены

так же, как в одномерном случае, символом g , а противоположные им направления — символом h . Рассмотрим задачу с точки зрения комбинаторики.

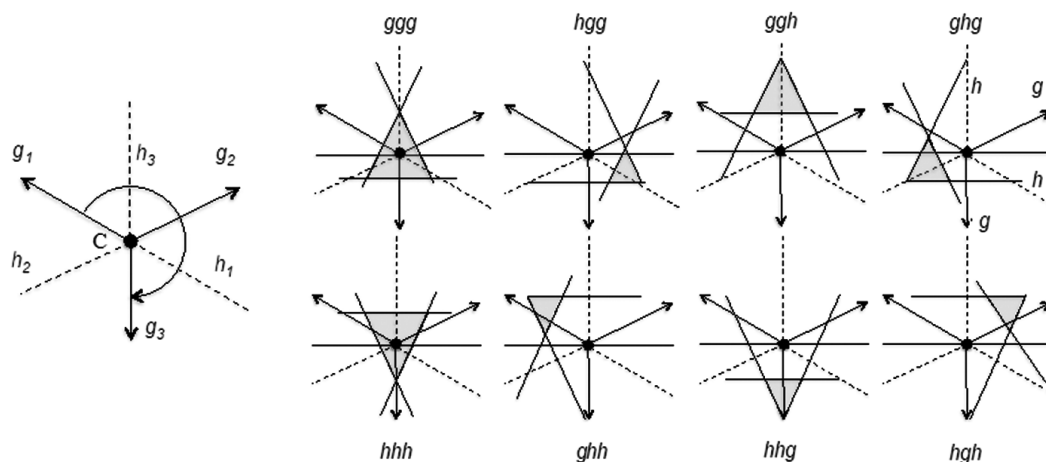


Рис. 2. Треугольники погрешностей при расположении градиентов навигационных функций в разных полуплоскостях (конфигурация 1)

В результате измерения трех НП и влияния случайных погрешностей возникает неопределенность, которую можно описать множеством возможных комбинаций погрешностей линий положения. Таких комбинаций всего восемь, из которых только две, как и на рис. 1, обеспечивают покрытие истинной точки треугольником погрешностей (см. рис. 2), т. е. вероятность P попадания истинной точки в треугольник теоретически равна 0,25. Это соответствует комбинациям символов ggg и hhh случайных погрешностей измерений при условии, что векторы-градиенты навигационных функций находятся в разных полуплоскостях относительно истинной параллели. Указанная вероятность зависит лишь от знаков погрешностей, а не от размеров треугольника погрешностей измерений. Алгебраически эта комбинаторная ситуация может быть описана также с помощью формулы бинома Ньютона третьей степени (3) с суммой биномиальных коэффициентов $k = 2^3 = 8$. По аналогии с первым примером выражение (3) подтверждает, что при $n = 2$ и $r = 1$ покрытие истинной точки обеспечивается только двумя комбинациями математических знаков погрешностей измерений, т. е. комбинациями ggg и hhh .

На рис. 3 показано расположение треугольников в случае, если все градиенты навигационных параметров расположены в одной полуплоскости относительно истинной параллели, хотя, в принципе, это может быть любая произвольная прямая. При такой ориентации градиентов только две комбинации символов: ghg и hgh в выражении (3), определяют попадание истинной точки в треугольник погрешностей.

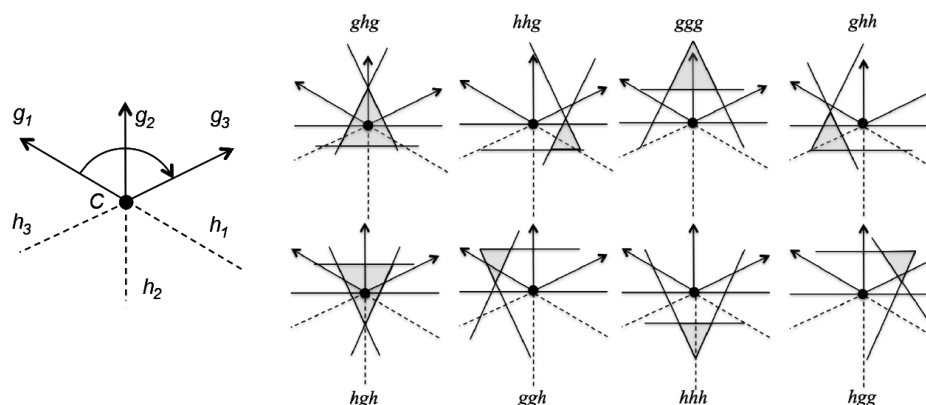


Рис. 3. Треугольники погрешностей при расположении всех градиентов навигационных функций в одной полуплоскости (конфигурация 2)

Таким образом, вероятность нахождения истинной точки в треугольнике погрешностей составляет 0,25 при единичной избыточности измерений НП и не зависит от конфигурации градиентов навигационных функций. Несомненно, что столь низкий уровень вероятности, оцениваемый по формуле

$$P = 2 / k, \quad (5)$$

накладывает ограничения на постановку ряда простейших навигационных задач, и, возможно, требует переосмысления методов их решения.

Очевидным является утверждение, что формула (5) применима для любой размерности пространства решений n при единичной избыточности измерений. На рис. 4 приведены результаты моделирования погрешностей измерений трех НП с помощью рандомизатора Excel, генерирующего случайную последовательность чисел по равномерному закону. В связи с тем, что влияние на исследуемую вероятность оказывают только знаки погрешностей для иллюстрации результата модули случайных погрешностей ЛП1 условно принимались равными единице.

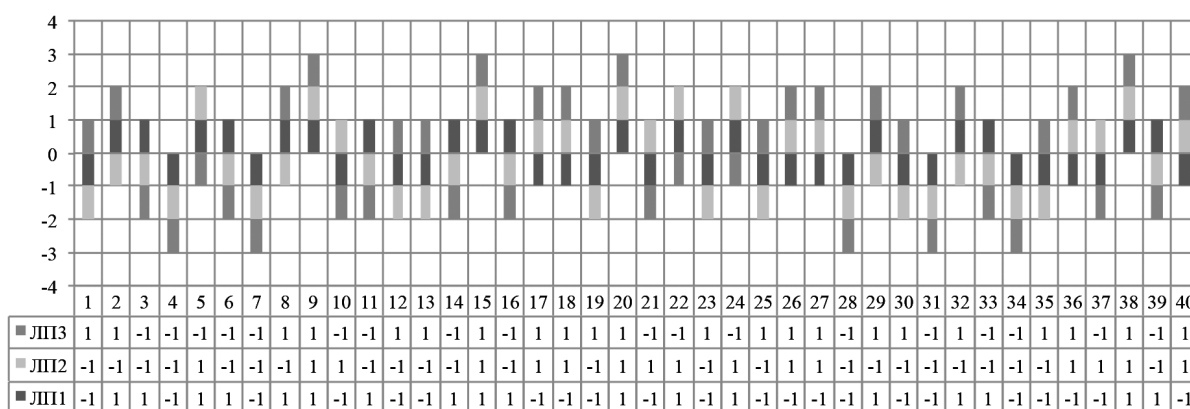


Рис. 4. Распределение математических знаков случайных погрешностей измерений трех линий положения

Из результатов моделирования следует, что комбинации знаков погрешностей линий положения в следующих блоках измерений: 4, 7, 9, 15, 20, 28, 31, 34, 38, формируют треугольники, накрывающие истинную точку при конфигурации 1 градиентов навигационных функций (см. рис. 2), а блоки комбинаций знаков 2, 8, 10, 21, 29, 32, 37 иллюстрируют накрытие истинной точки, если градиенты ориентированы по конфигурации 2 (см. рис. 3).

Избыточные измерения в трехмерном пространстве решений ($n = 3$, $r = 1$). Предположим, что во всех однородных измерениях НП присутствует неизвестная систематическая погрешность, которую необходимо определить, включив ее в вектор ΔX системы уравнений (1) наравне с координатами места судна. Формально это включение третьей координаты в вектор неизвестных. В данном случае для сохранения единичной избыточности ($r = 1$) необходимо выполнить четыре измерения, которые, как и в ранее рассмотренном случае, отягощены случайными погрешностями. Увеличение размерности пространства решений на единицу ($n = 3$) и сохранение единичной избыточности измерений ($m = 4$) не оказывает влияния на логику дальнейших рассуждений об истинной вероятности нахождения истинной точки в фигуре погрешностей, которая в данном случае является тетраэдром. Это простейшая фигура, образованная плоскостями положения в трехмерном пространстве решений системы (1). В данном случае разложение двучлена, состоящего из символов g и h в бином Ньютона, имеет следующий вид:

$$(g + h)^4 = g^4 + 4g^3h + 6g^2h^2 + 4gh^3 + h^4. \quad (6)$$

Данная формула показывает, что при расположении градиентов аналогично конфигурации 1 (см. рис. 2) только две комбинации: $gggg$ и $hhhh$, накрывают истинную точку положения судна.

При этом общее количество комбинаций увеличивается до шестнадцати, что объясняет снижение вероятности нахождения истинной точки в тетраэдре погрешностей по сравнению с отрезком и треугольником. Таким образом, вероятность попадания истинной точки в тетраэдр при соблюдении всех ранее изложенных предположений, в соответствии с формулой (5), составляет $P = 2/16 = 0,125$. Результат не меняется при расположении градиентов в одном полупространстве (конфигурация 2).

Моделирование вероятности накрытия истинных координат n -симплексом погрешностей.

При увеличении размерности вектора измерений (например, до $m = 5...6$ и более) и сохранении $r = 1$ формулы бинома Ньютона приобретают аналогичный вид и биномиальные коэффициенты могут быть собраны в так называемый *треугольник Паскаля* (табл. 1), в котором в каждой строке сумма биномиальных коэффициентов определяет число комбинаций математических знаков случайных погрешностей измерений. Здесь $P = 2/k$ — теоретическая вероятность нахождения истинной точки в фигуре погрешностей при $r = 1$; p — вероятность, полученная на основе результатов моделирования в сериях, каждая из которых составляет 100 блоков измерений.

Таблица 1

Бином Ньютона и треугольник Паскаля

№ п/п.	Бином Ньютона m -степени	$k = 2^m$	$r = 1$	
			P	p
1	$(g + h)^1 = g + h$	2		
2	$(g + h)^2 = g^2 + 2gh + h^2$ (отрезок)	4	0,5000	0,50
3	$(g + h)^3 = g^3 + 3g^2h + 3gh^2 + h^3$ (треугольник)	8	0,2500	0,25
4	$(g + h)^4 = g^4 + 4g^3h + 6g^2h^2 + 4gh^3 + h^4$ (тетраэдр)	16	0,1250	0,11
5	$(g + h)^5 = g^5 + 5g^4h + 10g^3h^2 + 10g^2h^3 + 5gh^4 + h^5$	32	0,0625	0,06
6	$(g + h)^6 = g^6 + 6g^5h + 15g^4h^2 + 20g^3h^3 + 15g^2h^4 + 6gh^5 + h^6$	64	0,0312	0,04
7	$(g + h)^7 = g^7 + 7g^6h + 21g^5h^2 + 35g^4h^3 + 35g^3h^4 + 21g^2h^5 + 7gh^6 + h^7$	128	0,0160	0,03
8	$(g + h)^8 = g^8 + 8g^7h + 28g^6h^2 + 56g^5h^3 + 70g^4h^4 + 56g^3h^5 + 28g^2h^6 + 8gh^7 + h^8$	256	0,0080	0,00
9	$(g + h)^9 = g^9 + 9g^8h + 36g^7h^2 + 84g^6h^3 + 126g^5h^4 + 126g^4h^5 + 84g^3h^6 + 36g^2h^7 + 9gh^8 + h^9$	512	0,0040	0,00
m	$(g + h)^m = C_m^0 g^m + C_m^1 g^{m-1}h + C_m^2 g^{m-2}h^2 + \dots + C_m^{m-1} g^1h^{m-1} + C_m^m h^m$	2^m		

Примечание. В нижней строке табл. 1 приведена обобщенная формула бинома Ньютона, описывающая комбинации положительных и отрицательных погрешностей m измерений навигационных параметров, где $C_m^0 g^m \dots C_m^m h^m$ — биномиальные коэффициенты.

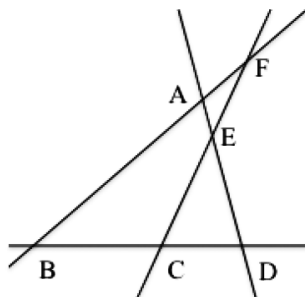
На основании результатов проведенного исследования можно сделать вывод о том, что при увеличении размерности пространства решений и сохранении $r = 1$ вероятность P нахождения истинной величины в n -симплексе погрешностей измерений уменьшается в два раза по сравнению с $(n - 1)$ -симплексом за счет увеличения в два раза количества комбинаций случайных погрешностей в векторе измерений ΔU , что является важной информацией. Используя терминологию оценки риска, можно утверждать, что при $r = 1$ любые методы осреднения измерений приводят к смещенной оценке результата, что эквивалентно для навигации понятию *потенциально-опасной ситуации*, которую необходимо контролировать.

Вероятность нахождения истинного места судна в фигуре погрешностей при $r > 1$. Рассмотрим задачу определения места судна, полагая, что выполнено четыре измерения ($r = 2$) и пять измерений ($r = 3$). В этих случаях в пространстве решений (плоскости) образуются более сложные фигуры погрешностей. При $r = 2$ это *2-комплекс*, состоящий из *2-симплексов* (треугольников) — рис. 5, а. Для $r = 3$ — это *3-комплекс*, количество треугольников в котором увеличивается до десяти (рис. 5, б).

Следуя ранее приведенной логике, можно предположить, что вероятность накрытия эталонной точки такими фигурами погрешностей должна увеличиться по сравнению с треугольником.

Комбинации знаков погрешностей измерений описываются, соответственно, строками 4 и 5 табл. 1, а вероятность P вычисляется с учетом избыточности измерений. Так, для $r = 2$ количество комбинаций линий положения, которые накрывают истинную точку C , составляет 8 из 16, т. е. $P = 8/16 = 0,5$. Для $r = 3$ таких комбинаций 24. Таким образом, при пяти линиях положения вероятность накрытия истинной точки фигурой, образованной случайными погрешностями измерений, составляет $P = 24/32 = 0,75$. Таким образом, с увеличением количества измерений наблюдается очевидный рост вероятности P .

а)



б)

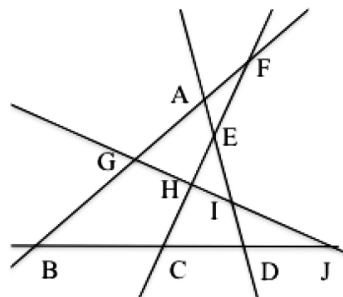


Рис. 5. Фигуры погрешностей на плоскости решений, образованные линиями положения: а — при $r = 2$; б — при $r = 3$

Аналогичные рассуждения справедливы для линейных пространств любых размерностей, образованных столбцами матрицы A в системе линейных уравнений навигационных функций (1).

Результаты (Results)

Итогом представленного в статье исследования является получение значений вероятностей накрытия истинной точки (истинных составляющих вектора неизвестных ΔX) фигурой, сформированной случайными погрешностями измерений (табл. 2).

Таблица 2

Вероятность накрытия истинной точки фигурами погрешностей

n	r									
	1"	2"	3"	4"	5"	6"	7"	8"	9"	10"
1"	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688	0,9844	0,9922	0,9961	0,9980	0,9990
2"	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688	0,9844	0,9922	0,9961	0,9980
3"	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688	0,9844	0,9922	0,9961
4"	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688	0,9844	0,9922
5"	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688	0,9844
6"	0,0156	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375	0,9688
7"	0,0078	0,0156	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750	0,9375
8"	0,0039	0,0078	0,0156	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500	0,8750
9"	0,0020	0,0039	0,0078	0,0156	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000	0,7500
10"	0,0010	0,0020	0,0039	0,0078	0,0156	0,0313	0,0625	0,1250	0,2500	0,5000

Полученная вероятность P определяется соотношением размерностей пространства решений n и избыточности измерений r в нем. Комбинаторная ситуация конкретного соотношения описывается соответствующей строкой треугольника Паскаля.

Обсуждение (Discussion)

В статье не рассматриваются вопросы точности определения координат места судна, но исследуется комбинаторный подход к оценке надежности рассчитываемых координат, основанный

на избыточности навигационных измерений и вероятности принадлежности истинных координат вектора ΔX фигуре погрешностей. Под *надежностью* координат места судна в статье понимается вероятность P нахождения истинного значения координат в *доверительном интервале*, сформированном текущей фигурой погрешностей измерений в n -мерном пространстве решений системы уравнений (1) при различной избыточности измерений r навигационных параметров. Такой *доверительный интервал* существует только на момент избыточных измерений. Геометрически это случайный, меняющийся во времени *симплекс / комплекс*, так как он сформирован случайными погрешностями измерений. Несомненно, мера Лебега¹ такого интервала связана с точностью искомых координат места судна, а не с вероятностью P . Тем не менее такая интерпретация вероятности P нахождения истинной точки в реальном доверительном интервале создает предпосылки для необходимости осуществления контроля за количеством избыточных измерений с целью получения теоретически достоверного результата.

Комбинаторный подход к оценке исследуемой вероятности использует конечное множество дискретных измерений, что отличает его от подходов к оценке вероятности, основанных на принципе чрезмерного обобщения параметров непрерывных законов распределения (например, закона Гаусса на конкретные измерения). Комбинаторный подход с практической точки зрения описывает более реалистично текущие навигационные измерения. Выполненное исследование содержит следующие ограничения:

1. Вероятность P нахождения истинной точки в фигуре погрешностей анализируется только на основе свойства симметричности распределения математических знаков случайных погрешностей и не затрагивает вопросов точности определения места судна.
2. Комбинаторный метод оценки вероятности, основанный на схеме Бернулли, предполагает, что погрешности измерений являются независимыми.
3. Результаты исследования не учитывают влияние величин и знаков систематических погрешностей измерений на вероятность накрытия истинной точки фигурой погрешностей.

Выводы (Summary)

Несмотря на то, что случайные погрешности измерений современных средств навигации достаточно малы, тем не менее для правильного восприятия измерительной навигационной информации, а также понимания и прогнозирования динамики развития навигационных сценариев целесообразно учитывать следующие полученные в данной работе результаты:

1. Низкий уровень вероятности нахождения места судна (координат вектора ΔX) в фигуре, образованной случайными погрешностями измерений при их единичной избыточности, не обеспечивает достаточной надежности оценки искомых координат, что независимо от методов их обработки способствует возникновению смещенных оценок и может квалифицироваться как *потенциально-опасная навигационная ситуация*, развитие которой при определенных обстоятельствах способно привести к навигационному происшествию.
2. Для повышения этого уровня вероятности, т. е. для увеличения *надежности* *обсервованных координат* необходимо обеспечить увеличение количества измерений навигационных параметров. Число измерений m , при указанных ранее условиях, не должно быть меньше величины $2n + 1$, где n — размерность пространства решений системы (1). Этот результат обеспечивает вероятность попадания истинной точки в указанный *доверительный интервал* более 90 % и является «ключом» процедуры контроля уровня необходимой избыточности навигационных измерений, особенно при плавании в сложных навигационных районах.
3. При действии случайных погрешностей измерений вероятность попадания истинной точки в указанный доверительный интервал не зависит от геометрических размеров и размерности фигуры погрешностей (симплекса / комплекса), а также от взаимной ориентации градиентов навигационных функций, используемых для определения места судна. Данная вероятность зависит только

¹ Мера Лебега — мера, обобщающая понятия длины отрезка, площади фигуры и объема тела на произвольное n -мерное евклидово пространство.

от количества комбинаций математических знаков погрешностей измерений, определяемых соответствующими коэффициентами бинома Ньютона. В пространстве решений любой размерности при единичной избыточности измерений существуют только две комбинации случайных погрешностей, формирующих фигуру (текущий доверительный интервал), включающую истинное значение координат вектора ΔX .

4. Важным результатом является то, что выводы распространяются как на однородные, так и на разнородные измерения, поскольку ключевым фактором служит лишь комбинация математических знаков случайных погрешностей измерений.

5. Увеличение размерности пространства измерений m при сохранении единичной избыточности системы уравнений (1) приводит к последовательному уменьшению вероятности нахождения истинного положения места судна в симплексе погрешностей измерений за счет увеличения количества комбинаций математических знаков $k = 2^m$ случайных погрешностей измерений навигационных параметров.

6. Полученные результаты побуждают к переосмыслению и дальнейшему исследованию некоторых основ классической навигации, касающихся достаточности и избыточности измерений, методов их обработки для расчета координат места судна, а также правильности понимания ключевых идей, заложенных в функционирование современной навигационной техники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nwigwe T. Statistical Analysis of Bulk Carrier Accident from 2011 to 2020/ T. Nwigwe, M. Kiyokazu // *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*. — 2022. — Vol. 16. — No. 1. — Pp. 153–157. DOI: 10.12716/1001.16.01.18.
2. Kerbrat A. Analysis of Navigational Casualties within European Waters and Case Study / A. Kerbrat // *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation*. — 2021. — Vol. 15. — No. 4. — Pp. 729–736. DOI: 10.12716/1001.15.04.02.
3. Galić S. A Chronological Overview of Scientific Research on Ship Grounding Frequency Estimation Models / S. Galić, Z. Lušić, S. Mladenović, A. Gudelj // *Journal of Marine Science and Engineering*. — 2022. — Vol. 10. — Is. 2. — Pp. 207. DOI: 10.3390/jmse10020207.
4. Логиновский В. А. Вероятность принадлежности истинной точки фигуре погрешностей / В. А. Логиновский // Методы и технические средства навигации: сб. науч. тр. / Государственная морская академия имени адмирала С. О. Макарова. — М.: Мортехинформреклама, 1993. — С. 41–48.
5. Strang G. Linear algebra and its application / G. Strang. — 3d edition. — Thomson Learning, Inc., 1988. — 505 p.
6. Devriendt K. The simplex geometry of graphs / K. Devriendt, P. Van Mieghem // *Journal of Complex Networks*. — 2019. — Vol. 7. — Is. 4. — Pp. 469–490. DOI: 10.1093/comnet/cny036.
7. Карпенко А. П. Метод комплексов. МГТУ им. Н. Э. Баумана, кафедра САПР (2003–2019) [Электронный ресурс] / А. П. Карпенко. — Режим доступа: <http://195.19.40.251/?cnt/?doc=BCRXQY6RLJMjHZRT8VUX> (дата обращения: 20.12.2022).
8. Закс Ш. Теория статистических выводов / Ш. Закс. — М.: МИР, 1975. — 779 с.
9. Филатов О. В. Треугольник Паскаля — основной объект теории вероятностей и комбинаторики длинных последовательностей / О. В. Филатов // Проблемы современной науки и образования. — 2020. — № 9 (154). — С. 28–37. DOI: 10.24411/2304-2338-2020-10901.
10. Кудряшов Ю. Г. Комбинаторика-2. Бином Ньютона [Электронный ресурс] / Ю. Г. Кудряшов, И. В. Щуров, И. А. Хованская. — Режим доступа: <http://math-info.hse.ru/f/2011-12/auto-old/ling/lecture3.pdf> (дата обращения: 20.12.2022).

REFERENCES

1. Nwigwe, T., and M. Kiyokazu. “Statistical Analysis of Bulk Carrier Accident from 2011 to 2020.” *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation* 16.1 (2022): 153–157. DOI: 10.12716/1001.16.01.18.

2. Kerbrat, Agnieszka. "Analysis of Navigational Casualties within European Waters and Case Study." *TransNav: International Journal on Marine Navigation and Safety of Sea Transportation* 15.4 (2021): 729–736. DOI: 10.12716/1001.15.04.02
3. Galić, Stipe, Zvonimir Lušić, Saša Mladenović, and Anita Gudelj. "A Chronological Overview of Scientific Research on Ship Grounding Frequency Estimation Models." *Journal of Marine Science and Engineering* 10.2 (2022): 207. DOI: 10.3390/jmse10020207.
4. Loginovskii, V. A. "Veroyatnost' prinadlezhnosti istinnoi točki figure pogreshnostei." *Metody i tekhnicheskie sredstva navigatsii. Sbornik nauchnykh trudov*. M.: Mortechnikinformreklama, 1993. 41–48.
5. Strang, Gilbert. *Linear algebra and its application*. 3d edition. Thomson Learning, Inc., 1988.
6. Devriendt, Karel, and Piet Van Mieghem. "The simplex geometry of graphs." *Journal of Complex Networks* 7.4 (2019): 469–490. DOI: 10.1093/comnet/cny036.
7. Karpenko, A. P. Metod kompleksov. Web. 20 Dec. 2022 <<http://195.19.40.251/?cnt/?doc=BCRXQY6RLJ MJHZRT8VUX>>.
8. Zaks, Sh. *Teoriya statisticheskikh vyvodov*. M.: MIR, 1975.
9. Filatov, Oleg Vladimirovich. "Pascal's triangle — the main object of the theory of probability and combinatorics of long sequences." *Problemy sovremennoi nauki i obrazovaniya* 9(154) (2020): 28–37. DOI: 10.24411/2304-2338-2020-10901.
10. Kudryashov, Yu. G., I. V. Shhurov, and I. A. Xovanskaya. Kombinatorika-2. Binom N'yutona. Web. 20 Dec. 2022 <<http://math-info.hse.ru/f/2011-12/auto-old/ling/lecture3.pdf>>.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Логиновский Владимир Александрович —
доктор технических наук, профессор
ФГБОУ ВО «ГУМРФ имени адмирала
С. О. Макарова»
198035, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург,
ул. Двинская, 5/7
e-mail: loginovskijVA@gumrf.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Loginovsky, Vladimir A. —
Dr. of Technical Sciences, professor
Admiral Makarov State University of Maritime
and Inland Shipping
5/7 Dvinskaya Str., St. Petersburg, 198035,
Russian Federation
e-mail: loginovskijVA@gumrf.ru

Статья поступила в редакцию 10 января 2023 г.
Received: January 10, 2023.