

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ПЕРЕКРЫТИЙ В СИСТЕМАХ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

CALCULATION OF PLANE OVERLAPPINGS IN SYSTEM OF SYMBOLICAL CALCULATIONS

В статье рассмотрен приближенный метод расчета плоских балочных перекрытий, применяемых в судовых конструкциях — днищ, бортов, палуб и переборок корабля; в строительных конструкциях — перекрытиях помещений; в гидротехническом строительстве — в качестве расчетной схемы плоского стального затвора гидротехнических сооружений или створки ворот судоходного шлюза. Предлагается математическая модель плоского перекрытия, работающего на изгиб, основанная на идее метода Навье: прогибы балок главного направления и перекрестных балок приравниваются в узловых точках. Излагается новый подход к расчету перекрестной системы балок, использующий обобщенные функции: дельта-функцию Дирака и единичную функцию Хэвисайда. С помощью дельта-функции моделируются сосредоточенные воздействия — узловые реакции взаимодействия пересекающихся балок. Приводятся результаты расчета перекрытия, состоящего из пяти балок главного направления и трех перекрестных балок. Балки обоих направлений жестко заземлены. Все необходимые расчеты выполнены в системе символьных вычислений Maple. Рассмотренный пример показывает эффективность применения метода Навье в совокупности с системой аналитических вычислений Maple к расчету балочных перекрытий различного назначения.

In article the approximate method of calculation of the beam's flat overlapping applied in shipbuilding — the bottoms, boards, decks and partitions of the ship, building constructions — floorings of premises, in hydraulic engineering — as the computing scheme of a flat steel lock of hydraulic engineering construction or a wing of gate of a navigable canal lock is considered. The mathematical model of the flat overlapping working on curving. Is offered, based on idea of a method of Navier — deflections of beams of a main beams and cross beams are equated in nodal points. The new approach to calculation of cross system of the beams, using generalised functions — a delta-function of Dirac and unit function of Heaviside is stated. With the help of delta-function the concentrated actions — central responses of interaction of intersected beams are modelled. Results of calculation of the overlapping consisting of five beams of a main beams and three cross beams are observed. Beams of both directions are rigidly jammed. All necessary calculations are fulfilled in system of symbolical evaluations Maple. The considered example shows efficiency of application of a method of Navier in aggregate with system of analytical evaluations Maple to calculation of beam's flat overlapping of different function.

Ключевые слова: плоское перекрытие, балка, метод Навье, дельта-функция Дирака, функция Хэвисайда, уравнение изгиба балки.

Key words: plane overlapping, beams, Navier method, the Dirac delta-function, the Heaviside function, the equation of bending beams.

Введение

Плоским перекрытием, как известно, называется система пересекающихся балок (см., например, [1]). Предполагается, что такие балки расположены в одной плоскости и жестко соединены друг с другом в точках пересечения. На такую систему может воздействовать нагрузка в плоскости расположения балок и в направлении нормали к этой плоскости. Предполагается, что балки перекрытия закреплены каким-либо способом на опорном контуре, причем некоторые из них могут быть свободны от закрепления. Главным направлением обычно называется направление, вдоль которого располагается большее число балок. Соответствующие главному направлению балки называются *балками главного направления*. Балки, идущие перпендикулярно главному направлению, называются *перекрестными балками*.

Плоские перекрытия являются элементами многих судовых конструкций — днищ, бортов, палуб и переборок корабля. Такие конструкции имеют в своем составе сплошные настилы, к которым жестко прикрепляются пересекающиеся балки. При расчете таких составных конструкций обычно их заменяют балочными системами по определенным правилам [1]. Например, чтобы учесть работу пластины (обшивки или настила) в составе поперечного и продольного набора балок, вводят в рассмотрение так называемые *присоединенные пояски*, которые включаются в состав балок. После этого конструкция становится системой пересекающихся балок — перекрытием. Для более точного расчета при выборе расчетной схемы перекрытия, конечно, необходимо учитывать наличие пластины (сплошного настила) [2] – [4].

Рассмотренная конструкция плоского перекрытия имеет очень широкую область применения, например, в промышленном и гражданском строительстве (перекрытия помещений), в гидротехническом строительстве такая конструкция может служить в качестве расчетной схемы плоского стального затвора гидротехнических сооружений или створки ворот судоходного шлюза.

Математическая модель работы плоского перекрытия

В данной работе предлагается математическая модель плоского перекрытия, работающего на изгиб, основанная на идее метода Навье: прогибы балок главного направления и перекрестных балок приравниваются в узловых точках [2], [4]. Основными неизвестными являются реакции взаимодействия пересекающихся балок, причем все балки рассматриваются как однопролетные. Балки главного направления находятся под воздействием заданной внешней нагрузки и узловых реакций взаимодействия R_{ij} . На перекрестные балки действуют только реакции взаимодействия балок (рис. 1). Предполагается, что вдоль оси x по линиям $y = y_i$ ($i = 1, 2, \dots, K_1$) расположены K_1 перекрестных балок, изгибные жесткости которых равны $E_{1i}J_{1i}$. Вдоль оси y по линиям $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, K_2$) расположены K_2 балок главного направления, изгибные жесткости которых, соответственно, равны $E_{2j}J_{2j}$. Будем считать, что длина главной балки равна b , а длина перекрестной балки равна a : $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Граничные условия (условия закрепления концов балок) могут быть любыми.

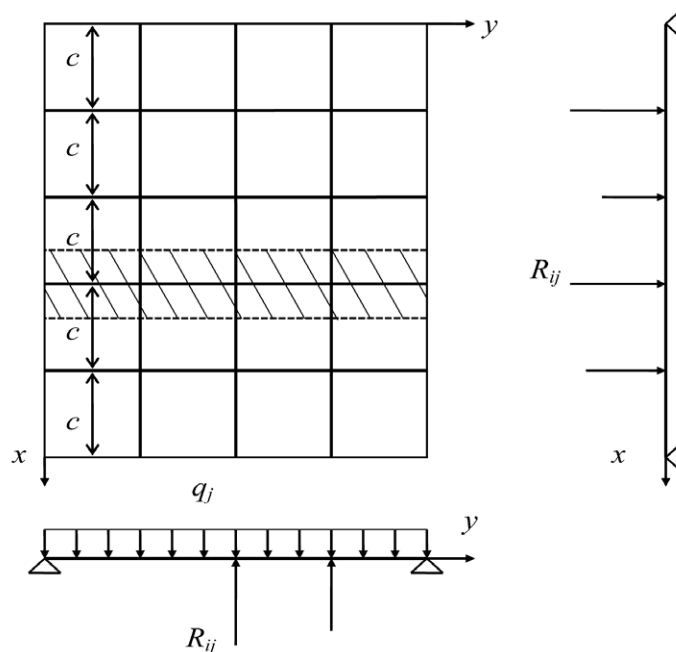


Рис. 1. Расчетная схема перекрытия

Рассмотрим j -ю балку главного направления. Уравнение изгиба ($0 \leq y \leq b$):

$$E_{2j}J_{2j} \frac{d^4 u_j}{dy^4} = q_j - \sum_{i=1}^{K_1} R_{ij} \delta(y - y_i), \quad (1)$$

где u_j — прогиб j -й балки главного направления; q_j — поперечная нагрузка, действующая на j -ю балку главного направления, которую считаем постоянной; R_{ij} — реакции взаимодействия j -й балки главного направления с i -ми перекрестными балками; сосредоточенные воздействия моделируются с помощью дельта-функций Дирака $\delta(y - y_i)$.

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$u_j(y) = C_0^j + C_1^j y + C_2^j y^2 + C_3^j y^3 + \frac{q_j y^4}{24E_{2j}J_{2j}} - \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ij}}{E_{2j}J_{2j}} \Psi_i^*(y - y_i), \quad (2)$$

где C_k^j ($k = 0, 1, 2, 3$; $j = 1, 2, \dots, K_2$) — произвольные постоянные; функция $\Psi_i^*(y - y_i)$ определяется как частное решение уравнения

$$\frac{d^4 u_j}{dy^4} = \delta(y - y_i) \quad (3)$$

и имеет вид

$$\Psi_i^*(y - y_i) = \frac{(y - y_i)^3}{6} \theta(y - y_i), \quad (4)$$

где $\theta(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \leq 0 \\ 1, & \xi > 0 \end{cases}$ — единичная функция Хэвисайда.

Для определенности рассмотрим случай, когда балки главного направления шарнирно оперты. Условия шарнирного опирания концов балки приводят к уравнениям

$$u_j|_{y=0,b} = 0; \quad \left. \frac{d^2 u_j}{dy^2} \right|_{y=0,b} = 0. \quad (5)$$

Из граничных условий (5) находим $C_0^j = 0$, $C_2^j = 0$ ($j = 1, 2, \dots, K_2$):

$$C_3^j = -\frac{q_j b}{12E_{2j}J_{2j}} + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ij}}{6bE_{2j}J_{2j}} \Psi_i^{*''}(b - y_i);$$

$$C_1^j = \frac{q_j b^3}{24E_{2j}J_{2j}} - \sum_{i=1}^{K_1} \frac{bR_{ij}}{6E_{2j}J_{2j}} \left[\Psi_i^{*''}(b - y_i) - \frac{6}{b^2} \Psi_i^*(b - y_i) \right],$$

причем

$$\Psi_i^{*''}(y - y_i) = (y - y_i) \theta(y - y_i).$$

Таким образом, для функции прогиба j -й балки главного направления будем иметь:

$$u_j(y) = u_j^0(y) - \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ij}}{E_{2j}J_{2j}} \Psi_i^0(y);$$

$$u_j^0(y) = \frac{q_j b^4}{24E_{2j}J_{2j}} \left\{ \frac{y}{b} - 2 \left(\frac{y}{b} \right)^3 + \left(\frac{y}{b} \right)^4 \right\};$$

$$\Psi_i^0(y) = \Psi_i^*(y - y_i) + \frac{b^2}{6} \left[\frac{y}{b} - \left(\frac{y}{b} \right)^3 \right] \Psi_i^{*''}(b - y_i) - \frac{y}{b} \Psi_i^*(b - y_i). \quad (6)$$

В этих формулах остаются пока неизвестными реакции R_{ij} .

Рассмотрим теперь i -ю перекрестную балку. Уравнение изгиба ($0 \leq x \leq a$):

$$E_{1i} J_{1i} \frac{d^4 v_i}{dx^4} = \sum_{j=1}^{K_2} R_{ij} \delta(x - x_j), \quad (7)$$

где $v_i(x)$ — прогиб i -й перекрестной балки.

Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$v_i(x) = D_0^i + D_1^i x + D_2^i x^2 + D_3^i x^3 + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{ij}}{E_{1,i} J_{1,i}} \Psi_j^*(x - x_j), \quad (8)$$

где для функции $\Psi_j^*(x - x_j)$ следует использовать формулу (4), в которой надо заменить $y \rightarrow x$, $i \rightarrow j$, а D_k^i ($k = 0, 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, K_1$) — произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Если концы балки шарнирно оперты, то решение задачи определяется формулами (6), в которых следует считать $q_j = 0$ и сделать замену $b \rightarrow a$, $i \rightarrow j$, $K_1 \rightarrow K_2$, $y \rightarrow x$. Будем иметь

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{ij}}{E_{1,i} J_{1,i}} \Psi_j^0(x), \quad \Psi_j^*(x - x_j) = \frac{(x - x_j)^3}{6} \theta(x - x_j),$$

$$\Psi_j^0(x) = \Psi_j^*(x - x_j) + \frac{a^2}{6} \left[\frac{x}{a} - \left(\frac{x}{a} \right)^3 \right] \Psi_j''(a - x_j) - \frac{x}{a} \Psi_j^*(a - x_j). \quad (9)$$

Если концы балки свободны, то в этом случае граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{d^2 v_i}{dx^2} \right|_{x=0,a} = 0, \quad \left. \frac{d^3 v_i}{dx^3} \right|_{x=0,a} = 0. \quad (10)$$

Подставив общее решение (8) в граничные условия (10), получим: $D_2^i = 0, D_3^i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, K_1$),

$$\sum_{j=1}^{K_2} R_{ij} \Psi_j''(a - x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{K_2} R_{ij} \Psi_j^{*(3)}(a - x_j) = 0. \quad (11)$$

Уравнения (11), с учетом формул $\Psi_j''(a - x_j) = a - x_j$ и $\Psi_j^{*(3)}(a - x_j) = 1$, переписываются в виде

$$\sum_{j=1}^{K_2} R_{ij} (a - x_j) = 0, \quad \sum_{j=1}^{K_2} R_{ij} = 0. \quad (12)$$

В левых частях уравнений (12) стоят, соответственно, главный момент и главный вектор сил R_{ij} , действующих на балку с номером i . При этом функция прогиба i -й перекрестной балки вычисляется по формуле

$$v_i(x) = D_0^i + D_1^i x + \sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{ij}}{E_{1,i} J_{1,i}} \Psi_j^*(x - x_j). \quad (13)$$

В формуле (13) неизвестными являются реакции R_{ij} и константы интегрирования $D_0^i = 0, D_1^i = 0$. Для определения этих неизвестных приравняем прогибы u_j и v_i в узловых точках, т.е. $u_j(y_q) = v_i(x_p), q = 1, 2, \dots, K_1, p = 1, 2, \dots, K_2$, или в явном виде

$$\sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{qj}}{E_{1,q} J_{1,q}} \Psi_j^*(x_p - x_j) + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ip}}{E_{2,p} J_{2,p}} \Psi_i^0(y_q - y_i) + C_0^q + C_1^q x_p = u_p^0(y_q). \quad (14)$$

Таким образом, если балки главного направления шарнирно оперты, а перекрестные балки имеют свободные концы, то функции прогибов балок вычисляются по формулам (6) и (13) после определения неизвестных констант из системы уравнений (12) и (14). Если все балки перекрытия шарнирно оперты, то функции прогибов балок находятся по формулам (6) и (9) после определения неизвестных констант из решения следующей системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{qj}}{E_{1,q} J_{1,q}} \Psi_j^*(x_p - x_j) + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ip}}{E_{2,p} J_{2,p}} \Psi_i^0(y_q - y_i) = u_p^0(y_q). \quad (15)$$

Приведем еще расчетные формулы, когда все балки перекрытия жестко защемлены. Этот случай часто встречается на практике.

Функция прогиба j -й балки главного направления вычисляется по формуле

$$u_j(y) = u_j^0(y) - \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ij}}{E_{2j}J_{2j}} \Psi_i^0(y), \quad (16)$$

где

$$u_j^0(y) = \frac{q_j b^4}{24 E_{2j} J_{2j}} \left(\frac{y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2, \quad (17)$$

$$\Psi_i^0(y) = \Psi_i^*(y - y_i) + \left(\frac{y}{b}\right)^2 (b - y) \Psi_i^{*'}(b - y_i) + \left(2\left(\frac{y}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{y}{b}\right)^2\right) \Psi_i^*(b - y_i). \quad (18)$$

Функция прогиба i -й перекрестной балки находится по формуле

$$v_i(x) = \sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{ij}}{E_{1i}J_{1i}} \Psi_j^0(x), \quad (19)$$

в которой для вычисления функции $\Psi_j^0(x)$ следует воспользоваться формулой (18) с заменой $y \rightarrow x$, $y_i \rightarrow x_p$, $b \rightarrow a$, причем производная функции $\Psi_i^*(y - y_i)$ вычисляется по формуле

$$\Psi_i^{*'}(y - y_i) = \frac{(y - y_i)^2}{2} \theta(y - y_i). \quad (20)$$

Неизвестные реакции взаимодействия балок R_{ij} находятся из системы

$$\sum_{j=1}^{K_2} \frac{R_{qj}}{E_{1q}J_{1q}} \Psi_j^0(x_p) + \sum_{i=1}^{K_1} \frac{R_{ip}}{E_{2p}J_{2p}} \Psi_i^0(y_q) = u_p^0(y_q), \quad (21)$$

причем функции $\Psi_j^0(x)$ и $\Psi_i^0(y)$ вычисляются по формуле, аналогичной формуле (18), а функция $u_j^0(y)$ — по формуле (17).

Числовой пример. Приведем результаты расчета перекрытия, состоящего из пяти балок главного направления и трех перекрестных балок. Балки обоих направлений жестко защемлены. Параметры балок [5]: двутавр № 30, момент инерции 7080 см⁴, момент сопротивления 472 см³; длина главной балки 4 м, а перекрестной балки — 6 м. Приведенная равномерно распределенная нагрузка на главные балки 100 кН/м. Расчеты выполнялись в системе Maple [6], [7].

Результаты расчета отображены на рис. 2 – 5 в виде эпюр прогибов и максимальных нормальных напряжений в балках перекрытия. Используется система СИ: длина приводится в метрах, напряжение — в паскалях.

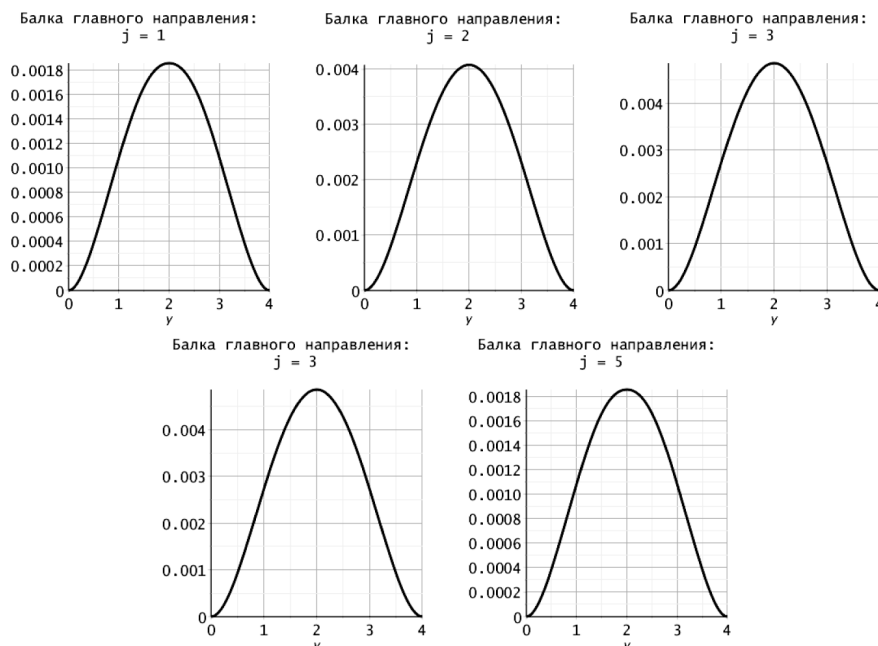


Рис. 2. Эпюры прогибов балок главного направления



Рис. 3. Эпюры прогибов перекрестных балок

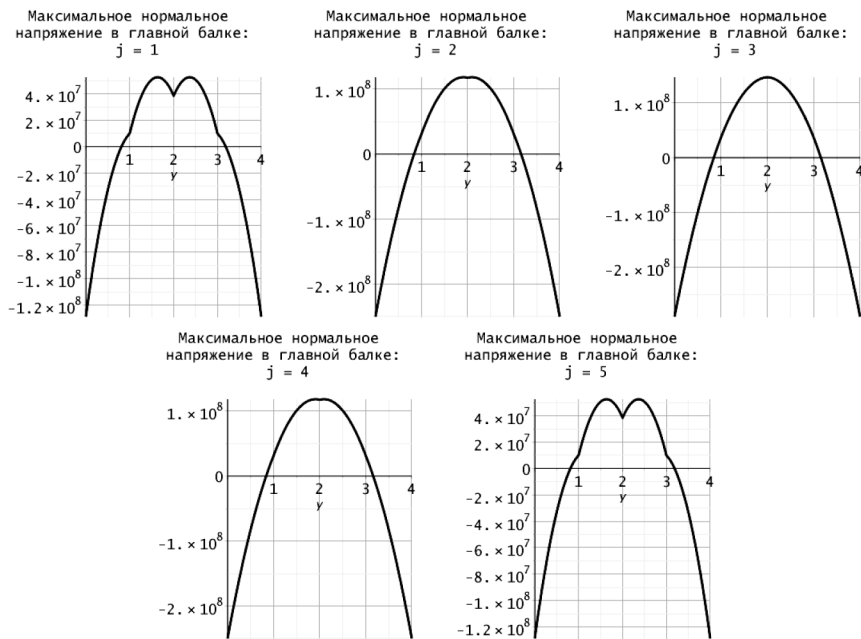


Рис. 4. Эпюры нормальных напряжений в балках главного направления



Рис. 5. Эпюры нормальных напряжений в перекрестных балках

Заключение. Рассмотренный пример показывает эффективность применения метода Навье в совокупности с системой аналитических вычислений Maple к расчету балочных перекрытий различного назначения. Как правило, для расчета таких конструкций в настоящее время используется метод конечных элементов. С развитием вычислительной техники и созданием систем аналитических вычислений, таких как Maple или Mathematica, появилась возможность анализа достаточно сложных задач математической физики аналитическими методами. Расчет балочного перекрытия численно-аналитическим методом рассмотрен, например, в статье [8]. Аналитическими методами стало возможным решать и другие сложные задачи теории упругости [9] – [14].

Список литературы

1. *Постнов В. А.* Строительная механика корабля и теория упругости: в 2 т. / В. А. Постнов, В. П. Сулов. — Л.: Судостроение, 1987. — Т. 1. — 288 с.
2. *Голоскоков Д. П.* Формализация на основе теории ребристых оболочек и численно-аналитические методы моделирования упругих тонкостенных конструкций нерегулярной структуры: дис. ...д-ра техн. наук: 05.13.18 / Д. П. Голоскоков. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 2001.
3. *Голоскоков Д. П.* Метод полиномов в задачах теории тонких плит / Д. П. Голоскоков, П. Г. Голоскоков. — СПб.: Изд-во СПГУВК, 2008.
4. *Голоскоков Д. П.* Численно аналитические методы расчета упругих тонкостенных конструкций нерегулярной структуры. / Д. П. Голоскоков. — СПб.: Изд-во А. Кардакова, 2006.
5. *Александров А. В.* Сопроотивление материалов: учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б.П. Державин. — М.: Высш. шк., 2003.
6. *Goloskokov D. P.* Analyzing simply supported plates using Maple system / D. P. Goloskokov // International conference on computer technologies in physical and engineering applications, ICCTPEA 2014, Russia, Saint-Petersburg, June 30 – July 4. — 2014. — Pp. 57–58.
7. *Голоскоков Д. П.* Примеры реализации в Maple энергетического метода для задач изгиба тонких плит / Д. П. Голоскоков // IV-й Международный семинар по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-2014. Международная школа по математическому моделированию в системах компьютерной математики KAZCAS-SCHOOL-2014; под общ. ред. Ю. Г. Игнатьева. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2014. — С. 33–62.
8. *Матросов А. В.* Расчет балочных перекрытий численно-аналитическим методом / А. В. Матросов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2012. — № 1. — С. 8–15.
9. *Матросов А. В.* Численно-аналитический алгоритм решения задач плоской деформации линейно-упругих тел сложной конфигурации / А. В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2008. — № 3. — С. 70.
10. *Матросов А. В.* Алгоритмы получения замкнутых форм операторов метода начальных функций для пространственных задач теории упругости / А. В. Матросов, Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2014. — № 1 (42). — С. 136–144.
11. *Матросов А. В.* Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании / А. В. Матросов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2011. — № 2. — С. 14а–21.
12. *Ширунов Г. Н.* Анализ напряженно-деформированного состояния упругого слоя под действием локальной нагрузки методом начальных функций / Г. Н. Ширунов // Вестник гражданских инженеров. — 2014. — № 5 (46). — С. 58–67.
13. *Shirunov G. N.* A method of initial functions in analyzing a stress and strain state of an elastic layer / G. N. Shirunov // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA) Editor: E. I. Veremey. — Изд-во СПбГУ; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA-USB). — 2014. — С. 166–167.
14. *Matrosov A. V.* Numerical-analytical computer modeling of a clamped isotropic thick plate / A. V. Matrosov, G. N. Shirunov // 2014 International conference on computer technologies in physical and engineering applications (ICCTPEA) Editor: E. I. Veremey. — СПб.: Изд-во СПбГУ; IEEE (IEEE Catalog number CFP14BDA-USB). — 2014. — С. 96.