

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ «СУДНО – ВАЕР – ТРАЛ» В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

FORMALIZATION OF DYNAMICS MECHANICAL SYSTEM A «SHIP-DRAGROPE-TRAWL» IN TRANSIENT CONDITIONR

В статье рассмотрена проблема формализации динамики нестационарной механической системы с одной степенью свободы «судно – ваер – трал» в переходном режиме. Для математического моделирования исследуемой системы принято допущение, что гибкий ваер может быть заменен в виде ваера-стержня. Рассмотрены различные случаи внешнего воздействия, проиллюстрирован характер его влияния на поведение рассматриваемой механической системы. В процессе интерпретации полученных моделей использована разработанная методика решения отдельного класса линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. В результате найдены аналитические зависимости, описывающие динамику нестационарных процессов механической системы с одной степенью свободы «судно – ваер – трал». Полученные расчетные зависимости можно использовать при проектировании конкретного технологического оборудования, а также в процессе его эксплуатации.

In the article presented the problem of formalization dynamics of the non-stationary mechanical system is considered with one degree freedom «ship-dragrope-trawl» in transient behavior. For the mathematical design of the prospected system assumption is accepted, that a flexible dragrope can be transferable as a dragrope-bar. The different cases of external influence are in-process considered, character of his influence is illustrated on behavior of the examined mechanical system.

In the process of interpreting the models developed by the author used technique for solving a particular class of linear differential equations with variable coefficients. As a result, found analytical dependences describing the dynamics of transient processes of a mechanical system with one degree of freedom «ship-trawl warp». The calculated can be used depending on the design of the particular process equipment, as well as during its use.

Ключевые слова: математическая модель, переходный режим, внешнее воздействие на систему, система «судно – ваер – трал», аналитическое решение, механические колебания.

Keywords: mathematical model, transient behavior, external affecting system, the system is a «ship-dragrope-trawl», analytical decision, mechanical vibrations.

Введение

Проблема расчета параметров движения механической системы с переменным инерционным коэффициентом возникает при решении ряда прикладных задач. Одной из таких систем является механическая система «судно – ваер – трал».

Трал является наиболее популярным орудием лова (рис. 1). На его долю выпадает около 70 %

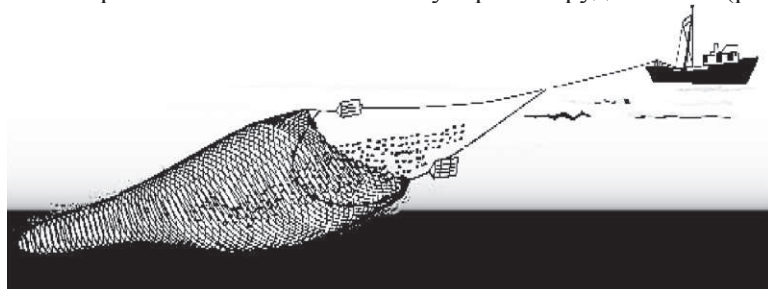


Рис. 1. Система «судно – ваер – трал»

добытой рыбы. В процессе движения система «судно – ваер – трал» испытывает значительные динамические нагрузки. Трал связан с судном с помощью ваеров (стальных тросов). Нередко наблюдаются случаи потери целостности ваеров (их разрыв). Поэтому задача формализации динамики движения ваера весьма актуальна [1], [2].

Основная часть

При решении задачи прицельного лова глубиной хода трала управляют с помощью скорости судна и длины ваера [2], [3], длину которого регулируют с помощью траловой лебедки. Движение ваера следует рассматривать в общем случае как нестационарное. Для этой цели при его формализации используют так называемую *стержневую модель* (рис. 2). Для построения такой модели заменяют гибкую нить стержнем AD_1 , оставив без изменения все остальные элементы.

Пусть в стационарном потоке жидкости находится идеально гибкий ваер AD , длина которого l , а сопротивление характеризуется параметром k_B . К концу D ваера приложена заданная сила \bar{R} . Пусть в том же потоке находится такого же веса стержень AD_1 , который также начинается в точке A , и к его концу D_1 приложена такая же сила. Легко показать, что можно так подобрать длину стержня и параметр k_C , характеризующий его сопротивление, что точка D_1 совместится с точкой D . Действительно, рассматривая полярные координаты точки D_1 (полюс в точке A , полярная ось параллельна скорости набегающего потока), видно, что замена параметра k_C будет менять полярный угол φ_1 , а изменение s_1 — радиус-вектор точки D_1 . Так что, изменяя обе величины, т. е. k_C и s_1 , можно задать точке D_1 любое заранее известное положение, в частности, соединить ее с точкой D . Таким образом, реальный ваер можно всегда заменить гипотетическим стержнем, не меняя при этом глубины хода распорной доски и трала. Некоторая замена характеристик собственного сопротивления ваера оказывает незначительное влияние на глубину хода трала. Поэтому далее будем считать диаметр ваера-стержня и его коэффициент сопротивления такими же, как у реального ваера-тралса [1], [3].

Математическая модель ваера в общем виде может быть представлена следующим уравнением:

$$m(t) \frac{d^2x}{dt^2} + \mu(t) \frac{dx}{dt} + c(t)x = F(t). \quad (1)$$

Как было отмечено ранее, существуют моменты времени, когда длина ваера непостоянна — он вытравляется или выбирается, в общем случае, по линейному закону. Следует отметить, что сила сопротивления и вес также являются переменными величинами. На динамику движения ваера оказывает влияние качка судна, а в момент зацепа трала к ваеру может быть приложен импульс силы.

Рассмотрим переходный процесс, когда длина ваера увеличивается, т. е. увеличиваем глубину хода трала. При этом принимаем, что масса модели также увеличивается. Наиболее естественно принять, что она изменяется по линейному закону

$$m(t) = m_0(1 + kt), \quad (2)$$

где коэффициент k — интенсивность роста массы системы; m_0 — ее начальная масса.

В этом случае уравнение движения имеет вид

$$m(t) \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + cx = F(t), \quad (3)$$

где $\mu = \frac{m_0 k}{2}$ — коэффициент, характеризующий сопротивление среды; c — коэффициент жесткости.

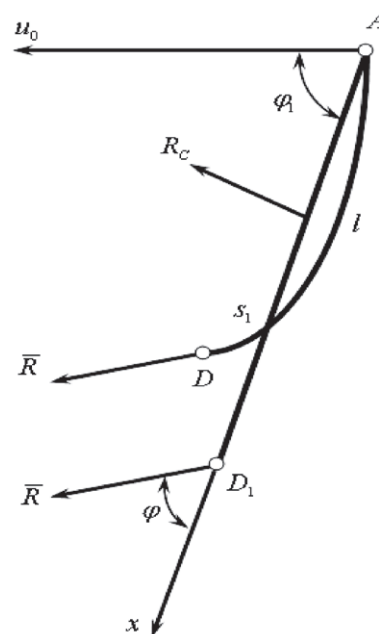


Рис. 2. Стержневая модель ваера

Тогда заданная механическая система описывается дифференциальным уравнением

$$m_0(1+kt)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0k}{2}\frac{dx}{dt} + cx = F(t). \quad (4)$$

Для нахождения закона движения выходной модели и, как следствие, определения основных характеристик необходимо найти общее решение дифференциального уравнения (4). Данное общее решение равно сумме некоторого частного решения $x_r(t)$ и общего решения $x_0(t)$ соответствующего однородного уравнения

$$x(t) = x_0(t) + x_r(t). \quad (5)$$

Как видно, полученная математическая модель системы «судно – ваер – трал» представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами. Для количественной оценки динамики движения исследуемой системы достаточно воспользоваться численными методами. Однако на стадии проектирования технологического оборудования, а также при его эксплуатации важно иметь расчетные зависимости, позволяющие аналитически определять основные характеристики и параметры механической системы. Таким образом, целью работы является поиск аналитических зависимостей, описывающих динамику нестационарных процессов механической системы с одной степенью свободы «судно – ваер – трал».

В процессе решения поставленной цели была использована разработанная методика решения отдельного класса линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [3], [5]. Суть ее заключается в использовании замены переменной $z = f(t)$, которая позволяет в исходном уравнении (3) перейти к уравнению с постоянными коэффициентами.

Дифференциальное уравнение свободных колебаний исходной механической системы можно записать в виде

$$m_0(1+kt)\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0k}{2}\frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (6)$$

Данное дифференциальное уравнение является линейным, один из коэффициентов которого — переменный. Для нахождения аналитического решения такого вида уравнений предложен метод постоянных коэффициентов при производных по новой переменной [3] – [7], в соответствии с которым следует ввести новую переменную $z = f(t)$, условно названную *определяющей функцией*. Тогда возможен переход к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и производными по новой переменной. Для перехода к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и производными по новой переменной введем новую переменную $z = \sqrt{1+kt}$. Пусть коэффициенты C_0 , C_1 и C_2 будут иметь вид $C_0 = \frac{m_0k^2}{4}$, $C_1 = 0$ и $C_2 = c$. С учетом этого уравнение (6) перепишем в виде

$$\frac{m_0k^2}{4}\frac{d^2x}{dz^2} + cx = 0$$

или

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{4}{k^2}\omega_0^2x = 0, \quad (7)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m_0}}$ — начальная частота свободных колебаний.

Решив полученное уравнение методом неопределенных коэффициентов и перейдя к исходной переменной t , получим общее решение $x_0(t)$ соответствующего однородного уравнения, которое описывает динамику свободного движения системы:

$$x_0(t) = a \sin\left(\frac{2}{k}\omega_0\sqrt{1+kt} + \gamma\right). \quad (8)$$

Определим постоянные величины α и γ , исходя из начальных условий, что при $t = 0$ $x = x_0$ и $\dot{x} = \dot{x}_0$:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2}} \quad \text{и} \quad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{x_0 \omega_0}{\dot{x}_0} - \frac{2}{k} \omega_0. \quad (9)$$

Как видно, данное уравнение описывает незатухающие колебания. Так как при достижении своего максимального значения скорость тела равна нулю, можно показать, что полупериоды движения увеличиваются согласно зависимости

$$\tau_n^0 = \frac{k\pi}{2\omega_0^2} (n\pi - \gamma).$$

Амплитуда движения при этом постоянна и равна a .

Внешняя сила осуществляет положительную работу, обеспечивая прилив энергии к механической системе. Характер движения при этом может значительно отличаться. Приложенная нагрузка может изменяться со временем по различным законам [5], [8].

Допустим, что в начальный момент времени к исследуемой механической системе «судно – ваер – трал» приложена сила F_0 , мгновенно возрастающая и сохраняющая затем постоянное значение. Тогда дифференциальное уравнение такого движения имеет вид

$$m_0(1+kt) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0k}{2} \frac{dx}{dt} + cx = F_0. \quad (10)$$

Учитывая новую переменную и полученные значения постоянных коэффициентов, в соответствии к предложенной нами методике, перейдем к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{4}{k^2} \omega_0^2 x = \frac{4F_0}{m_0k^2}. \quad (11)$$

Частное решение данного уравнения найдем в виде $x_r(t) = \frac{F_0}{c}$. Отсюда перемещение заданной системы под действием внезапно приложенной нагрузки описывается уравнением

$$x(t) = a \sin\left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma\right) + \frac{F_0}{c}. \quad (12)$$

Анализ полученной зависимости показывает, что такие колебания также незатухающие, полупериод, как и в случае свободных колебаний, увеличивается по закону $\tau_n^0 = \frac{k\pi}{2\omega_0^2} (n\pi - \gamma)$. Внезапно приложенная нагрузка влияет только на положение равновесия, изменяя его на величину $\frac{F_0}{c}$, амплитуда движения при этом относительно нового центра постоянна и также равна a .

Пусть приложенная к системе нагрузка изменяется по закону $F(t) = k_0 t$, где k_0 — постоянный коэффициент, характеризующий темп роста силы. В этом случае движение системы описывается уравнением

$$m_0(1+kt) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0k}{2} \frac{dx}{dt} + cx = k_0 t. \quad (13)$$

Исходя из выражения, определяющего новую переменную $z = \sqrt{1+kt}$, получим

$$t = \frac{1}{k} (z^2 - 1). \quad (14)$$

Отсюда соответствующее уравнение с постоянными коэффициентами и производными по переменной z будет иметь вид

$$\frac{d^2x}{dz^2} + \frac{4}{k^2} \omega_0^2 x = \frac{4k_0}{m_0k^2} \frac{1}{k} (z^2 - 1). \quad (15)$$

В этом случае уравнение колебательного движения системы может быть представлено в форме

$$x(t) = a \sin \left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma \right) + \frac{k_0}{c} \left(t - \frac{m_0 k}{2} \right). \quad (16)$$

Данное уравнение описывает движение механической системы относительно прямой $\frac{k_0}{c} \left(t - \frac{m_0 k}{2} \right)$.

Допустим, что в момент зацепа троса к ваеру [3], [9] может быть приложен импульс силы F в течение бесконечно малого времени $\theta < t < 0$:

$$J = \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{-\theta}^0 F dt, \quad (17)$$

который имеет конечное значение. В соответствии с теоремой импульсов тело получает в течение времени действия импульса скорость $\dot{x}_0 = \frac{J}{m_0}$. Сдвиг тела в течение этого времени при $\theta \rightarrow 0$ стремится к нулю [3], [5], [10], [11]. При этом закон движения системы под действием импульсивной нагрузки запишем в виде

$$x(t) = a_1 \sin \left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma_1 \right), \quad (18)$$

где a_1 и γ_1 – постоянные величины, определяемые из начальных условий при $t = 0$ $x_0 = 0$ и $\dot{x}_0 = \frac{J}{m_0}$:

$$a_1 = \frac{J}{\sqrt{m_0 c}} \quad \text{и} \quad \gamma = -\frac{2}{k} \omega_0. \quad (19)$$

Особый интерес представляет случай колебательного движения под действием гармонической силы. Пусть она изменяется по закону $F_0 \sin pt$, где p — частота ее колебаний.

Поведение искомой механической системы под действием гармонической силы описывается дифференциальным уравнением

$$m_0 (1+kt) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m_0 k}{2} \frac{dx}{dt} + cx = F_0 \sin pt. \quad (20)$$

С учетом уравнения (10) получим дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, интегрируемое в квадратурах:

$$\frac{d^2 x}{dz^2} + \frac{4}{k^2} \omega_0^2 x = \frac{4F_0}{m_0 k^2} \sin \left[\frac{p}{k} (z^2 - 1) \right]. \quad (21)$$

Частное решение уравнения (2.56) найдем в виде

$$x_r(t) = \frac{F_0}{c \sqrt{A^2 + B^2}} \sin \left(pt + \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \right), \quad (22)$$

где $A = 1 - \frac{p^2}{\omega_0^2} (1+kt)$ и $B = \frac{kp}{2\omega_0^2}$. (23)

Исследование движения механической системы под действием гармонической силы имеет важное значение. Как известно, при равенстве собственной частоты системы и частоты возмущающей силы возникает явление резонанса, которое влечет за собой нестабильность работы данного механизма. В рассматриваемой модели (4) приняли, что инерционный коэффициент является функцией от времени $m(t) = m_0 (1+kt)$. Отсюда следует, что и собственная частота будет переменной. При этом можно показать, что в данном случае закон ее изменения имеет вид

$$\omega_0(t) = \sqrt{\frac{c}{m_0 (1+kt)}}.$$

Учитывая, что резонанс возникает при $\omega_0 = p$, определим время прохождения исследуемой модели через зону резонанса:

$$t_p = \frac{1}{k} \left(\frac{c}{m_0 p^2} - 1 \right).$$

Допустим, что на механическую систему действует периодическая произвольная сила $F(t)$. В качестве примера возьмем силу, изменяющуюся по закону

$$F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < l \\ F_0, & l \leq t < 2l \end{cases} \quad (24)$$

с периодом $2l$.

Представим данную нагрузку в виде ряда Фурье:

$$F(t) = \frac{F_0}{2} - \frac{2F_0}{\pi} \sin pt - \frac{2F_0}{3\pi} \sin 3pt - \frac{2F_0}{5\pi} \sin 5pt - \dots \quad (25)$$

Согласно принципу независимости действия сил, смещение тела, которое вызвано действием силы, разложенной в ряд, равно сумме смещение, вызванных каждым из членов ряда, т. е.

$$x_r(t) = \frac{2F_0}{m_0 c k^2} + \frac{2F_0}{m_0 c \pi k^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n \sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \sin \left(npt + \arctg \frac{B_n}{A_n} \right), \quad (26)$$

где
$$A_n = 1 - \frac{(np)^2}{\omega_0^2} (1 + kt) \quad \text{и} \quad B_n = \frac{kn p}{2\omega_0^2}. \quad (27)$$

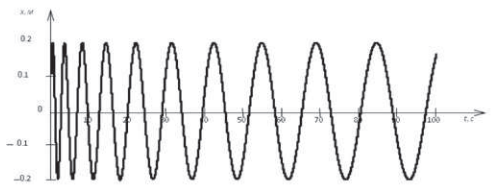
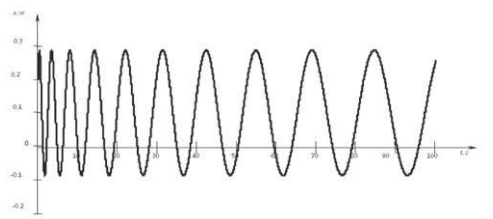
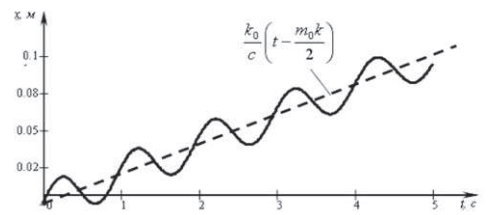
Явление резонанса при негармоническом возмущении возникает при совпадении частоты n -й гармоники с собственной частотой колебаний системы.

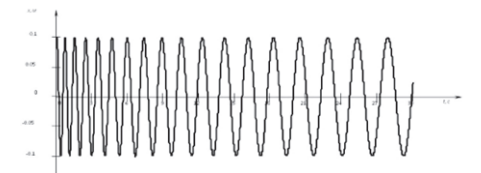
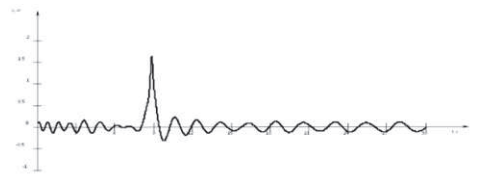

В результате проведенных исследований можно сделать следующие **выводы**:

– найдены аналитические зависимости, описывающие динамику нестационарных процессов механической системы с одной степенью свободы «судно – ваер – трал», результаты которых сведены в таблицу;

– выполнено имитационное моделирование, наглядно иллюстрирующее характер динамики переходного процесса в случаях различного внешнего воздействия на исследуемую систему

Обобщенные результаты аналитического исследования системы «судно-ваер-трал»

<p>Свободные колебания $F(t) \equiv 0$</p>	$x_0(t) = a \sin \left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1 + kt} + \gamma \right)$	
<p>Внезапная нагрузка $F(t) = F_0$</p>	$x(t) = a \sin \left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1 + kt} + \gamma \right) + \frac{F_0}{c}$	
<p>Линейно возрастающая нагрузка $F(t) = k_0 t$</p>	$x(t) = a \sin \left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1 + kt} + \gamma \right) + \frac{k_0}{c} \left(t - \frac{m_0 k}{2} \right)$	

<p>Импульсная нагрузка</p> $J = \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_{-\theta}^0 F dt$	$x(t) = a_1 \sin\left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma_1\right)$	
<p>Периодическая гармоническая нагрузка</p> $F(t) = F_0 \sin pt$	$x(t) = a \sin\left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma_1\right) + \frac{F_0}{c\sqrt{A^2+B^2}} \sin\left(pt + \arctg \frac{B}{A}\right)$	
<p>Периодическая негармоническая нагрузка</p> $F(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < l \\ F_0, & l \leq t < 2l \end{cases}$	$x(t) = a \sin\left(\frac{2}{k} \omega_0 \sqrt{1+kt} + \gamma_1\right) + \frac{2F_0}{m_0 c k^2} + \frac{2F_0}{m_0 c \pi k^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} \sin\left(npt + \arctg \frac{B_n}{A_n}\right)$	

Список литературы

1. Фридман А. Л. Сборник задач и упражнений по теории и проектированию орудий промышленного рыболовства / А. Л. Фридман, М. М. Розенштейн. — М.: Агропромиздат, 1987. — 256 с.
2. Фридман А. Л. Теория и проектирование орудий промышленного рыболовства / А. Л. Фридман. — М.: Легкая и пищевая промышленность, 1981. — 328 с.
3. Ивановская А. В. Построение математической модели неводовыборочного комплекса на этапе кошелькования невода / А. В. Ивановская // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. — 2012. — Т. 6. — № 7 (60). — С. 62–66.
4. Кислый А. А. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами / А. А. Кислый, Н. В. Ивановский, А. В. Ивановская // Сб. науч. тр. Керченского государственного морского технологического университета. — 2008. — № 9. — С. 38–41.
5. Ivanovskaya A. The research of the dynamic of the mechanical system with variable parameters. Journal of Vibroengineering. ISSN 1392-8716. Kaunas, Lithuania. — December, 2010. — volume 12, issue 4. — P. 494–499.
6. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний / В. Л. Бидерман. — М.: Высш. шк., 1980. — 408 с.
7. Соколов С. С. Построение информационного обеспечения безопасной эксплуатации судна при помощи автоматизации управления размещением груза и реагирования на внештатные ситуации / С. С. Соколов // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 4 (26). — С. 184–190.
8. Черный С. Г. Интеллектуальная поддержка принятия решений при оптимальном управлении для судовых электроэнергетических систем / С. Г. Черный, А. А. Жиленков // Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова. — 2014. — № 3 (25). — С. 68–75.
9. Голиков С. П. Математическое моделирование элементов тралового комплекса / С. П. Голиков, Н. В. Ивановский, С. Г. Черный, Н. П. Сметух, О. С. Скидан // Водный транспорт. — К.: КДАВТ, 2013. — № 2 (17). — С. 181–190.
10. Ивановский Н. В. Элементы математического моделирования для процессов судовождения / Н. В. Ивановский, С. П. Голиков, С. Г. Черный, А. С. Кузьменко, Д. Г. Куценко // Проблеми інформаційних технологій. — 2013. — № 1 (13). — С. 128–131.
11. Черный С. Г. Системный анализ процессов синергетики для судоходной отрасли / С. Г. Черный // Транспорт: наука, техника, управление. — 2014. — № 8. — С. 12–15.