

при годовой ставке 5 % — на 0.81 %,  
при годовой ставке 6 % — на 1.19 %,  
при годовой ставке 7 % — на 1.66 %,  
при годовой ставке 8 % — на 2.21 %,  
при годовой ставке 9 % — на 2.86 %.

В долларах сокращения размеров выплат составляют:  
145505.92,  
214487.95,  
298569.12,  
398447.29,  
514774.80,

что свидетельствует о целесообразности реализации «мягкого» режима ежемесячных платежей при значительных размерах ставок и продолжительном времени выплат по инвестициям (рис. 1).

Таким образом, на основе представленного вычислительного алгоритма и программы в кодах MATLAB возможно оперативно осуществлять выбор такого сценария, при котором минимизируются собственные выплаты на погашение кредитов, а также сокращаются сроки их погашения.

### Список литературы

1. Крылов А. Н. О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем / А. Н. Крылов // Изв. АН СССР. — 1931.
2. Уоткинс Д. С. Основы матричных вычислений / Д. С. Уоткинс. — М.: БИНОМ: Лаб. знаний, 2006. — 664 с.
3. Сахаров В. В. Применение матрицы Крылова для аperiodического управления динамическими объектами / В. В. Сахаров, В. И. Королев // Журнал Университета водных коммуникаций. — 2011. — Вып. 1 (9).
4. Сахаров В. В. Совершенствование управления качеством сборки судовых механизмов в судоремонте / В. В. Сахаров, А. А. Кузьмин. — СПб.: Судостроение, 2012. — 202 с.

УДК 531

**Б. Ф. Клочков,**  
канд. техн. наук, доцент,  
ГУМРФ имени адмирала С. О. Макарова

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ НЕРАВНОЖЕСТКОГО РОТОРА В УПРУГИХ ОПРАХ

## STABILITY OF VARIOUS STIFFNESS ROTOR MOTION IN ELASTIC SUPPORTS

*Исследована устойчивость движения неравножесткого ротора при трех вариантах конструкции его опор. Определена оптимальная схема ротора с невращающимися упругими опорами.*

The article gives research of a stability of a motion of a various stiffness rotor in three versions of the construction of its supports. An optimal scheme of a rotor in nonrotating elastic supports is defined.

Ключевые слова: устойчивость движения, ротор, упругие опоры, анизотропия упругого поля.  
Key words: a stability of a motion, a rotor, elastic supports, anisotropy of elastic field.

**П**РИ вращении роторов в ряде случаев возникают колебания с частотами, кратными скорости их вращения. Известно, что одной из причин, вызывающих колебания с частотой, равной удвоенной скорости вращения, является неоднородность радиального коэффициента жесткости ротора (анизотропия упругого поля вала) [1; 2]. Примерами анизотропных роторов, то есть роторов двойкой жесткости, являются роторы двухполюсных электромашин; валы, сечения которых на некоторых участках в силу назначения машины прямоугольные.

Известные практические рекомендации — отстройка рабочих диапазонов частот от виброопасных, установка упругих опор для уменьшения анизотропии суммарного упругого поля между ротором и фундаментом [1; 3, с. 27–44] — оказываются часто недостаточными.

Возможен другой способ активной борьбы с указанным выше нежелательным явлением, заключающийся в применении дополнительного анизотропного упругого поля, вращающегося вместе с валом. Последнее может быть создано как на некоторых участках вала, так и с помощью специальных упругих опор [4]. Это обстоятельство открывает новый путь уменьшения ширины зон неустойчивости движения и амплитуд колебаний кратных частот.

Идею этого метода рассмотрим на примере простейшей роторной системы, состоящей из одного анизотропного вала с установленным в середине его и без перекоса диском (рис. 1).

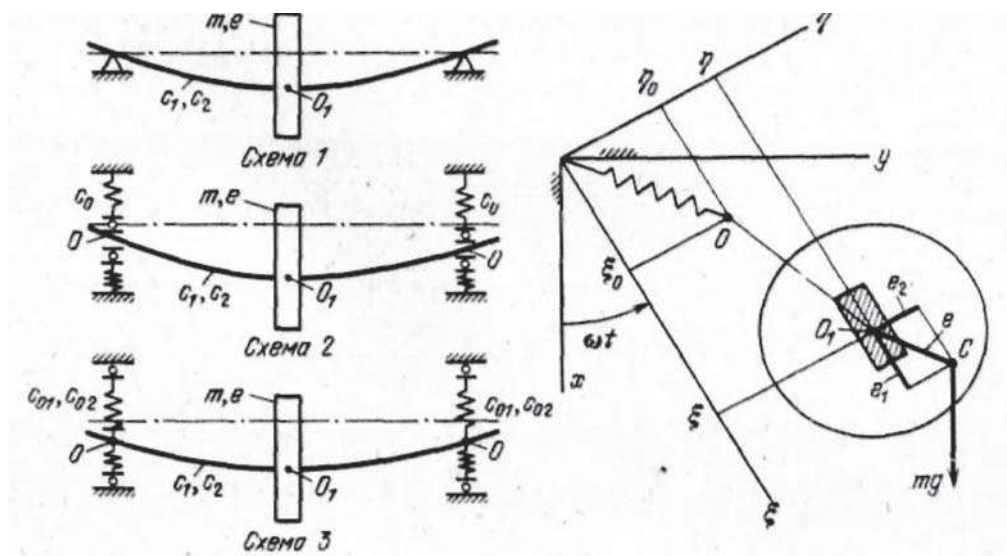


Рис. 1. К выводу уравнений движения

Вводится система координат  $O\xi\eta$ , вращающаяся вместе с ротором с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . В этой системе вал имеет жесткости  $c_1$  и  $c_2$  вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$  и вращается в подшипниках, внутренние кольца которых также анизотропны с коэффициентами жесткости, равными соответственно  $c_{01}$  и  $c_{02}$  вдоль тех же осей. Диск с приведенной к его центру массой вала имеет массу  $m$  и удельный дисбаланс  $e$  с составляющими  $e_1$  и  $e_2$  вдоль осей  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. Координаты геометрического центра диска и центров опор обозначим соответственно через  $\xi_0, \eta_0$  и  $\xi_0, \eta_0$ . При этом в силу симметрии считаем, что перемещения обеих опор одинаковы. Сила сопротивления движению принимается пропорциональной абсолютной скорости центра диска (коэффициент пропорциональности  $k$ ).

Без учета сил неупругого сопротивления и массы опор уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} &= -k(\dot{\xi} - \omega\eta) - c_1(\xi - \xi_0) + 2m\omega\dot{\eta} + m\omega^2(\xi + e_1) + mg \cos \omega t, \\ m\ddot{\eta} &= -k(\dot{\eta} + \omega\xi) - c_2(\eta - \eta_0) - 2m\omega\dot{\xi} + m\omega^2(\eta + e_2) - mg \sin \omega t, \\ 0 &= -2c_{01}\xi_0 + c_1(\xi - \xi_0), \\ 0 &= -2c_{02}\eta_0 + c_2(\eta - \eta_0) \end{aligned} \quad (1)$$

или после исключения  $\xi_0$  и  $\eta_0$ :

$$\begin{aligned} m\ddot{\xi} + k(\dot{\xi} - \omega\eta) - 2m\omega\dot{\eta} + (c_3^{(1)} - m\omega^2)\xi &= me_1\omega^2 + mg \cos \omega t, \\ m\ddot{\eta} + k(\dot{\eta} + \omega\xi) + 2m\omega\dot{\xi} + (c_3^{(2)} - m\omega^2)\eta &= me_2\omega^2 - mg \sin \omega t, \end{aligned}$$

где  $c_3^{(1)}$  и  $c_3^{(2)}$  — эквивалентные коэффициенты жесткости, определяемые формулами:

$$\frac{1}{c_3^{(1)}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{2c_{01}}, \quad \frac{1}{c_3^{(2)}} = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{2c_{02}}. \quad (2)$$

Если подобрать жесткости вала и опор так, что  $c_3^{(1)} = c_3^{(2)}$ , то полученные выше уравнения совпадают с уравнениями движения изотропного вала, поэтому зона неустойчивости между критическими скоростями стягивается в точку вследствие их равенства [1; 2]. Колебания с частотой  $2\omega$ , вызываемые весом, также не возникают.

Примем для сил неупругого сопротивления при деформации вала линейную зависимость от скорости деформации [5, с. 45–75]. Наряду с традиционно выполненными упругими опорами с неврашающимся изотропным (однородным) упругим полем выше обоснована возможность применения опор с вращающимся анизотропным полем. Для сопоставления результатов параллельно проведем исследование устойчивости движения ротора двойкой жесткости в жестких опорах. С этой целью исследуем устойчивость движения ротора двойкой жесткости при трех вариантах установки (динамических схемах 1–3) (рис. 1).

#### Уравнения движения

Воспользуемся расчетной схемой, изображенной на рис. 1, и обозначениями, приведенными выше. При движении ротора возникает сила сопротивления движению (сила внешнего демпфирования), принятая пропорциональной абсолютной скорости центра  $O_1$  диска с коэффициентом пропорциональности  $k$ . При деформациях вала и упругих элементов опор в схемах 2 и 3 возникают силы неупругого сопротивления, принятые, согласно гипотезе Фохта, пропорциональными соответствующим скоростям деформаций с коэффициентом  $h$ .

Рассмотрим вначале схему 1. Для ротора, установленного по этой схеме, сила неупругого сопротивления  $F$  записывается непосредственно в проекциях на оси  $\xi$  и  $\eta$ , вращающиеся вместе с ротором:  $F_\xi = -h\dot{\xi}$ ,  $F_\eta = -h\dot{\eta}$ . Так как сила внешнего демпфирования  $R$  пропорциональна абсолютной скорости центра диска, то она должна быть записана вначале в неподвижной системе координат  $R_x = -k\dot{x}$ ,  $R_y = -k\dot{y}$ . По формулам преобразования координат:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t, \\ y &= \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t \end{aligned} \quad (3)$$

получаем проекции силы сопротивления движению на оси подвижной системы координат:

$$R_\xi = -k\dot{\xi} + k\omega\eta, \quad R_\eta = -k\dot{\eta} - k\omega\xi.$$

Таким образом в принятых обозначениях уравнения движения ротора по схеме 1 имеют вид [1]:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{\xi} + (k + h)\dot{\xi} - 2m\omega\dot{\eta} - k\omega\eta + (c_1 - m\omega^2)\xi &= me_1\omega^2 + mg \cos \omega t, \\
 m\ddot{\eta} + (k + h)\dot{\eta} + 2m\omega\dot{\xi} + k\omega\xi + (c_2 - m\omega^2)\eta &= me_2\omega^2 - mg \sin \omega t.
 \end{aligned} \quad (4)$$

Для обобщения результатов исследования полезно перейти к безразмерным (относительным) параметрам. Обозначим через  $\omega_0 = \sqrt{(c_1 + c_2) / 2m}$  усредненную критическую скорость ротора в жестких опорах,  $\beta = \omega / \omega_0$  — безразмерную скорость вращения,  $\delta = k / m\omega_0$  — безразмерный коэффициент внешнего демпфирования,  $\kappa = h / m\omega_0$  — относительный коэффициент неупругого сопротивления,  $\mu = (c_1 - c_2) / (c_1 + c_2)$  — коэффициент анизотропии упругого поля вала и  $\tau = \omega_0 t$  — безразмерное время; тогда, обозначив производные  $d/d\tau$  штрихами, приведем уравнения движения (4) схемы 1 к виду:

$$\begin{aligned}
 \eta'' + (\delta + k)\eta' - 2\beta\xi' + (1 - \mu - \beta^2)\eta + \beta\delta\xi &= e_2\beta^2 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \beta\tau, \\
 \xi'' + (\delta + k)\xi' - 2\beta\eta' + (1 + \mu - \beta^2)\xi - \beta\delta\eta &= e_1\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \beta\tau.
 \end{aligned} \quad (5)$$

Обратимся теперь к схемам 2 и 3. Для этих схем силы неупругого сопротивления в вале пропорциональны относительным скоростям  $(\dot{\xi} - \dot{\xi}_0)$  и  $(\dot{\eta} - \dot{\eta}_0)$ . Силы неупругого сопротивления при деформациях упругих элементов опор для схемы 2 записываются сначала в неподвижной системе координат  $x, y$ , в которой они имеют вид  $-2h\dot{x}_0$  и  $-2h\dot{y}_0$ , а затем, после преобразования по формулам (3), во вращающейся системе  $\xi, \eta$ :  $-2h(\dot{\xi}_0 - \omega\eta_0)$  и  $-2h(\dot{\eta}_0 + \omega\xi_0)$ .

Для перехода к безразмерным параметрам обозначим через  $\alpha = (c_1 + c_2) / 2c_0$  относительную податливость опор. Тогда уравнения движения ротора, установленного по схеме 2, примут вид:

$$\begin{aligned}
 \xi'' + k(\xi' - \xi'_0) + \delta(\xi' - \beta\eta) + (1 + \mu)(\xi - \xi_0) - 2\beta\eta' - \beta^2\xi &= e_1\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \beta\tau, \\
 \eta'' + k(\eta' - \eta'_0) + \delta(\eta' - \beta\xi) + (1 - \mu)(\eta - \eta_0) + 2\beta\xi' - \beta^2\eta &= e_2\beta^2 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \beta\tau, \\
 k(3\xi'_0 - \xi' - 2\beta\eta_0) + 2\xi_0 / \alpha - (1 + \mu)(\xi - \xi_0) &= 0, \\
 k(3\eta'_0 - \eta' + 2\beta\xi_0) + 2\eta_0 / \alpha - (1 - \mu)(\eta - \eta_0) &= 0.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Наконец, в схеме 3 упругое поле вращается вместе с ротором, поэтому силы неупругого сопротивления в опорах описываются непосредственно во вращающейся системе координат слагаемыми  $-2h\dot{\xi}_0$  и  $-2h\dot{\eta}_0$ . После приведения к безразмерному виду и некоторых преобразований уравнения движения ротора, установленного по схеме 3, принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \xi'' + k(\xi' - \xi'_0) + \delta(\xi' - \beta\eta) + (1 + \mu)(\xi - \xi_0) - 2\beta\eta' - \beta^2\xi &= e_1\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \beta\tau, \\
 \eta'' + k(\eta' - \eta'_0) + \delta(\eta' - \beta\xi) + (1 - \mu)(\eta - \eta_0) + 2\beta\xi' - \beta^2\eta &= e_2\beta^2 - \frac{g}{\omega_0^2} \sin \beta\tau, \\
 k(3\xi'_0 - \xi' - 2\beta\eta_0) + 2\xi_0 / \alpha - (1 + \mu)(\xi - \xi_0) &= 0, \\
 k(3\eta'_0 - \eta' + 2\beta\xi_0) + 2\eta_0 / \alpha - (1 - \mu)(\eta - \eta_0) &= 0,
 \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha = (c_1 + c_2) / (c_{01} + c_{02})$  — относительная усредненная податливость опор;  $\nu = (c_{01} - c_{02}) / (c_{01} + c_{02})$  — коэффициент анизотропии упругого поля опор. Отметим, что без учета сил неупругого сопротивления ( $\kappa = 0$ ) уравнения (7) принимают вид:

$$\begin{aligned}
 \xi'' + \delta(\xi' - \beta\eta) - 2\beta\eta' + \left[ 2 \frac{(1 + \mu)(1 + \nu)}{\alpha(1 + \mu) + 2(1 + \nu)} - \beta^2 \right] \xi &= e_1\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \beta\tau, \\
 \eta'' + \delta(\eta' + \beta\xi) - 2\beta\eta' + \left[ 2 \frac{(1 - \mu)(1 - \nu)}{\alpha(1 - \mu) + 2(1 - \nu)} - \beta^2 \right] \eta &= e_2\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \sin \beta\tau.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Условие (2) в безразмерных параметрах записывается в виде

$$\frac{(1+\mu)(1+\nu)}{\alpha(1+\mu)+2(1+\nu)} = \frac{(1-\mu)(1-\nu)}{\alpha(1-\mu)+2(1-\nu)}. \quad (9)$$

Из квадратного относительно  $\nu$  уравнения (9) определяется значение

$$\nu^0 = [\alpha(1-\mu^2) - \sqrt{\alpha^2(1-\mu^2)^2 + 16\mu^2}] / 4\mu. \quad (10)$$

Анализ знаков показывает, что в формуле (10) перед корнем следует брать лишь «-». График зависимости  $\nu^0 = \nu^0(\alpha)$ , построенный для примера при значении  $\mu = 0,2$ , изображен на рис. 2.

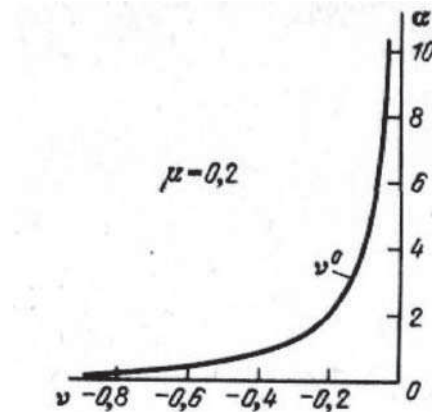


Рис. 2. Зависимость  $\nu^0 = \nu^0(\alpha)$  при  $\mu = 0,2$

Таким образом, движение ротора двойкой жесткости, установленного в опорах с вращающимся анизотропным упругим полем с коэффициентом анизотропии  $\nu^0$ , описывается уравнениями:

$$\eta'' + \delta(\eta' + \beta\xi) + 2\beta\xi' + \left(\frac{c_3}{m\omega_0^2} - \beta^2\right)\eta = e_2\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \sin \beta\tau,$$

$$\xi'' + \delta(\xi' - \beta\eta) - 2\beta\eta' + \left(\frac{c_3}{m\omega_0^2} - \beta^2\right)\xi = e_1\beta^2 + \frac{g}{\omega_0^2} \cos \beta\tau,$$

где  $c_3 = m\omega_0^2 \frac{2(1+\mu)(1+\nu)}{\alpha(1+\mu)+2(1+\nu)} = m\omega_0^2 \frac{2(1-\mu)(1-\nu)}{\alpha(1-\mu)+2(1-\nu)}$ .

Эти уравнения совпадают с уравнениями движения изотропного вала, поэтому зона неустойчивости между критическими скоростями стягивается в точку вследствие их равенства. Колебания с частотой  $2\beta$ , вызываемые весом, также не возникают. Динамика ротора, установленного по схеме 3, с учетом сил неупругого сопротивления исследуется ниже.

#### Устойчивость движения ротора в жестких опорах

Укажем предварительно, что в такой же постановке устойчивость этой схемы была исследована в [1], где получены следующие результаты.

1. Движение устойчиво во всем диапазоне скоростей, за исключением интервала между критическими скоростями  $\omega_1 = \sqrt{c_1 / m}$  и  $\omega_2 = \sqrt{c_2 / m}$  или, в принятых здесь безразмерных параметрах, между  $\beta_1 = \sqrt{1-\mu}$  и  $\beta_2 = \sqrt{1+\mu}$ .

2. С увеличением коэффициента внешнего демпфирования  $\delta$  зона неустойчивости сужается и сдвигается в сторону более низких скоростей. Однако вывод о неограниченной устойчивости анизотропного ротора за второй критической скоростью  $\omega_2$  находится в противоречии с известным результатом, полученным в [1], о неустойчивости движения изотропного ротора в жестких опорах за критической скоростью. Поэтому проведем подробное исследование устойчивости дви-

жения ротора, установленного по схеме 1. Применяя метод  $D$ -разбиений, решение однородной (с нулевыми правыми частями) системы уравнений (5) отыскиваем в виде

$$\xi = A \exp(ip_0 \tau), \eta = B \exp(ip_0 \tau), \quad (11)$$

где  $A, B$  — произвольные постоянные;  $p_0$  — частота колебаний на границе устойчивости во вращающейся системе координат;  $i = \sqrt{-1}$ .

Подстановка решений (11) в однородные уравнения (5) приводит к характеристическому определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_2^2 - \beta^2 - p_0^2 + i(\delta + k)p_0 & -\beta\delta - 2i\beta p_0 \\ \beta\delta + 2i\beta p_0 & \beta_2^2 - \beta^2 - p_0^2 + i(\delta + k)p_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как  $\Delta$  — комплексное число, равное нулю, должны равняться нулю его действительная и мнимая части, то есть:

$$p_0^4 - [2(1 + \beta^2) + (k + \delta)^2]p_0^2 + (\beta_1^2 - \beta^2)(\beta_2^2 - \beta^2) + \delta^2\beta^2 = 0, \quad (12)$$

$$[p_0^2 - 1 + \beta^2 - 2\delta\beta^2 / (k + \delta)]p_0 = 0. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что на границе зоны устойчивости частота колебаний, по форме которых происходит потеря устойчивости, равна 0. Подставив это значение  $p_0$  в (12), получим уравнения двух границ зоны неустойчивости

$$\beta_{Г1,2}^2 = 0,5 \left[ 2 - \delta^2 \pm \sqrt{(2 - \delta^2)^2 - 4(1 - \mu^2)} \right]. \quad (14)$$

Уравнения (14) совпадают с уравнениями, полученными в [1]. Однако уравнения (14) показывают, что на устойчивость движения схемы 1 никак не влияет внутреннее трение. Это свидетельствует о неполноте исследования. Возвратимся поэтому к уравнению (13), из которого найдем зависимость другой, ненулевой частоты собственных колебаний на границе устойчивости от скорости вращения

$$p_0^2 = 1 - \beta^2 - 2\beta^2\delta / (k + \delta).$$

Подставив это выражение в (12), получим уравнение третьей границы области устойчивости:

$$\beta_{Г3} = \sqrt{(-b + \sqrt{b^2 - 4c}) / (2a)}, \quad (15)$$

где  $a = (2k/\delta)^2$ ,  $b = k^4/\delta^2 + 2k^3/\delta - 2k\delta - 4(k/\delta + 1)^2$ ,  $c = -(k/\delta + 1)^2 [\mu + (k + \delta)^2]$ .

Для получения действительных значений  $\beta_{Г3}$  в уравнении (15) перед корнем в подкоренном выражении для  $\beta_{Г3}$  следует брать знак «+».

Частота неустойчивых колебаний на третьей границе устойчивости определяется из уравнения (12) после подстановки в него  $\beta = \beta_{Г3}$ :

$$p_{03} = \pm \sqrt{-d - \sqrt{d^2 - f}},$$

где  $d = -1 - \beta_{Г3}^2 - (k + \delta)^2 / 2$ ,  $f = (\beta_1^2 - \beta_{Г3}^2)(\beta_2^2 - \beta_{Г3}^2) + \delta^2\beta_{Г3}^2$ .

На рис. 3 сплошными жирными линиями показаны границы областей устойчивости движения анизотропного ротора в жестких опорах (штриховкой обозначены зоны неустойчивости). Как видно из рис. 3, вторая и третья границы пересекаются, откуда следует важный вывод: при малом внешнем демпфировании (в данном случае  $\delta = 0,02$ ) движение неустойчиво во всем диапазоне за первой границей; причиной этой неустойчивости является внутреннее трение. При увеличении внешнего демпфирования движение становится вновь устойчиво за второй границей, но не во всем диапазоне скоростей, как это показано в [1], а лишь до третьей границы, после чего система окончательно теряет устойчивость.

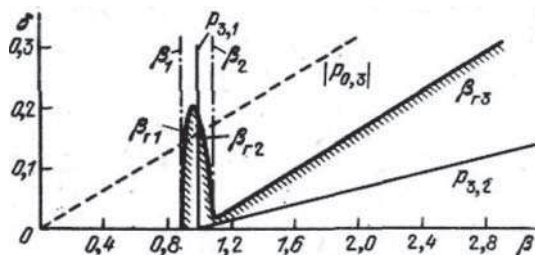


Рис. 3. Границы областей устойчивости движения схемы 1 при  $\mu = 0,2$  и  $k = 0,16$

Итак, ротор, установленный в жесткие опоры, имеет предел устойчивости, отодвигающийся в сторону больших скоростей при увеличении демпфирования. Частота  $p_{0,1,2}$  развивающихся колебаний на первой и второй границах области устойчивости равна нулю во вращающейся системе координат, то есть равна частоте вращения в неподвижной системе, следовательно, на первой и второй границах система теряет устойчивость по форме прямой синхронной прецессии. График модуля частоты  $|p_{0,3}|$  (во вращающейся системе координат) изображен на рис. 3 штриховой линией. Этим частотам соответствуют в неподвижной системе координат частоты  $p_{3,1} = \beta_{Г3} - p_{0,3}$  и  $p_{3,2} = \beta_{Г3} + p_{0,3}$ , графики которых изображены сплошными линиями. Отметим, что при любом демпфировании  $p_{3,1} = 1$ , то есть частота равна усредненной критической скорости  $p_{3,1} = (\beta_1 + \beta_2) / 2$ .

Анализ результатов при других значениях коэффициента анизотропии  $\mu$  упругого поля ротора показывает, что с увеличением  $\mu$  ширина зоны неустойчивости между критическими скоростями  $\beta_1$  и  $\beta_2$  увеличивается; одновременно сдвигается в сторону более низких скоростей третья граница окончательной потери устойчивости.

Как следует из уравнений (14), в случае жестких опор ротора не существует практического способа подавления зоны неустойчивости  $[\beta_{Г1}$  и  $\beta_{Г2}]$ , так как требуемое для этой цели искусственное введение внешнего демпфирования влечет за собой применение упругодемпферных опор, то есть переход к динамическим схемам 2 или 3 анизотропного ротора в упругих опорах.

*Устойчивость движения ротора в невращающихся упругих опорах*

Устойчивость движения этой модели без учета внутреннего и внешнего трения была исследована в [1], где обнаружена единственная зона неустойчивости между критическими скоростями  $\omega_1$  и  $\omega_2$  или в безразмерных параметрах между

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{2+\alpha(1-\mu)}} \text{ и } \beta_2 = \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{2+\alpha(1+\mu)}}. \quad (16)$$

Результаты численного исследования [6] представлены на рис. 4 (внутри изображенного объема движение устойчиво). Сечение граничной поверхности устойчивости–неустойчивости плоскостью  $\delta = 0,1$  показано на рис. 5, на котором также нанесен график модуля частоты  $|p_{0,3}|$  на третьей границе. Частотам  $\pm p_{0,3}$  соответствуют в неподвижной системе две частоты:  $p_{3,1} = \beta_{Г3} - p_{0,3}$  и  $p_{3,2} = \beta_{Г3} + p_{0,3}$ . График частоты  $p_{3,1}$  показан сплошной линией, график же частоты  $p_{3,2}$  ввиду больших ее значений не изображен.

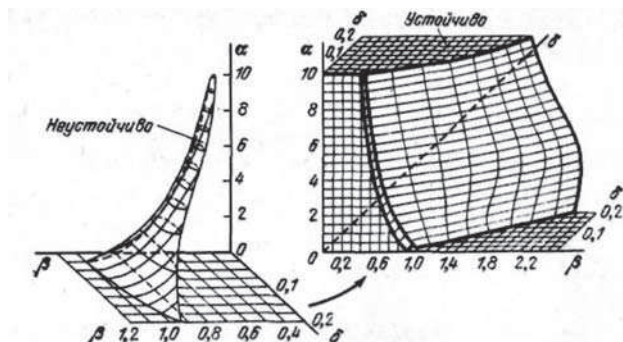


Рис. 4. Граничная поверхность областей устойчивости движения схемы 2 при  $\mu = 0,16$  и  $\mu = 0,2$

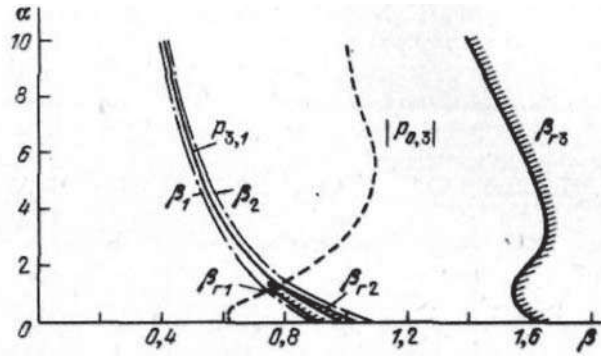


Рис. 5. Границы областей устойчивости движения схемы 2 при  $\delta = 0,1$

Как и в случае жестких опор, на первой и второй границах устойчивости во вращающейся системе координат  $p_{01} = p_{02} = 0$  или в неподвижной системе  $p_1 = \beta_{r1}$  и  $p_2 = \beta_{r2}$ , то есть потеря устойчивости на этих границах происходит по форме прямой синхронной прецессии. Частота  $p_{3,1}$  также является усредненной собственной частотой системы:  $p_{3,1} \approx 0,5(\beta_1 + \beta_2)$ , где  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — критические скорости без учета демпфирования, определяемые выражениями (16). Кривые  $\beta_1(\alpha)$  и  $\beta_2(\alpha)$  показаны на рис. 5 штрихпунктирными линиями. Как следует из рис. 4 и 5, при естественном внешнем демпфировании, под которым следует понимать демпфирование с коэффициентом  $\delta < 0,2$ , с ростом податливости опор  $\alpha$  зона неустойчивости между критическими скоростями подавляется уже при жесткости каждой опоры, примерно равной жесткости вала. Ширина интервала устойчивой работы достигает максимума при  $\alpha \approx 3$ . С увеличением внешнего демпфирования  $\delta$  зона устойчивости примерно линейно расширяется. Обнаружение третьей границы дополняет результаты исследования устойчивости, полученные в [1].

*Устойчивость движения ротора в опорах с вращающимся упругим полем*

На рис. 6 изображены граничные поверхности устойчивости–неустойчивости в пространстве параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\nu$ , построенные по результатам численного исследования. Влияние коэффициента анизотропии  $\nu$  упругого поля опор на устойчивость движения показано на рис. 7, на котором изображено сечение граничных поверхностей плоскостью  $\alpha = 1$ . Влияние коэффициента жесткости опор на устойчивость движения схемы 3 иллюстрирует рис. 8, на котором показаны сечения граничных поверхностей плоскостью  $\nu = 0,07$ . Наконец, влияние внешнего демпфирования  $\delta$  на ширину зон устойчивости показано на рис. 9.

Кроме того, на рис. 7–9 штрихпунктирными линиями показаны критические скорости  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , определяемые для схемы 3 без учета демпфирования формулами:

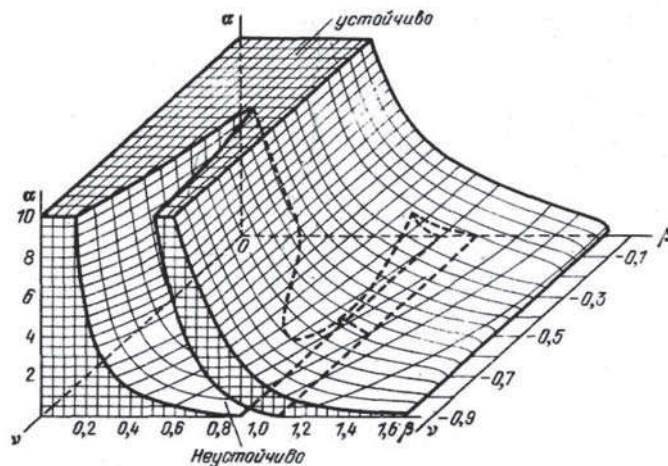


Рис. 6. Граничная поверхность области устойчивости движения схемы 3 при  $\mu = 0,2$ ,  $k = 0,16$  и  $\delta = 0,1$



$$\beta_1 = \sqrt{2 \frac{2(1+\mu)(1+\nu)}{\alpha(1+\mu) + 2(1+\nu)}} \quad \text{и} \quad \beta_2 = \sqrt{2 \frac{2(1-\mu)(1-\nu)}{\alpha(1-\mu) + 2(1-\nu)}}. \quad (17)$$

Как и для предыдущих схем, модуль частот  $|p_{03}|$  колебаний на третьей границе изображен штриховой линией, а соответствующие им в неподвижной системе координат частоты  $p_{3,1}$  и  $p_{3,2}$  показаны сплошными тонкими линиями.

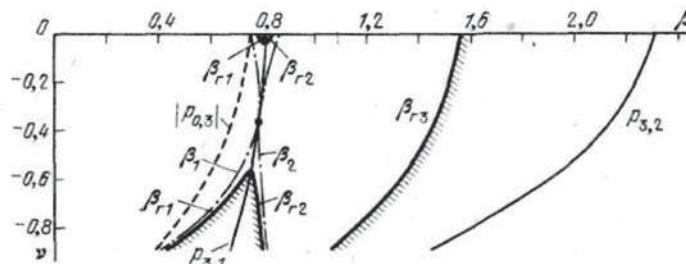


Рис. 7. Границы областей устойчивости движения схемы 3 при  $\alpha = 1$  и  $\delta = 0,1$

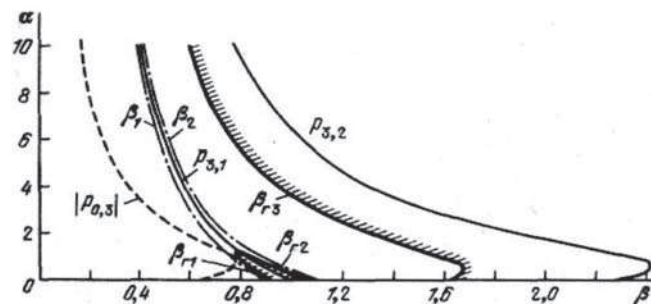


Рис. 8. Границы областей устойчивости движения схемы 3 при  $\nu = -0,07$  и  $\delta = 0,1$

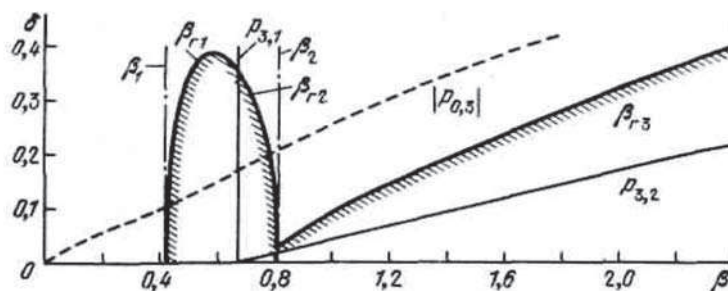


Рис. 9. Границы областей устойчивости движения схемы 3 при  $\alpha = 1$  и  $\nu = -0,9$

Анализ приведенных результатов показывает, что выбор значения коэффициента анизотропии  $\nu$  вращающейся упругой опоры вблизи значения  $\nu^0$ , определяемого выражением (10) (см. рис. 2), гарантирует подавление зоны неустойчивости между критическими скоростями без специального введения внешнего демпфирования. При этом даже значительное несовпадение этих значений, то есть «расстройка» по коэффициенту  $\nu$  не приводит к появлению неустойчивых колебаний в зоне  $[\beta_1, \beta_2]$ . Внешнее демпфирование усиливает этот эффект, и, кроме того, с ростом  $\delta$  зона устойчивой работы расширяется примерно по линейному закону. Частоты собственных колебаний на всех трех границах подчинены тем же закономерностям, что и в двух предыдущих схемах.

## Выводы

Прежде всего напомним, что количественные оценки верны для взятого в качестве примера случая  $\mu = (c_1 - c_2) / (c_1 + c_2) = 0,2$  и  $h = 0,16 m\omega_0$ , то есть  $k = 0,16$ .

Проведенный анализ устойчивости движения показал, что для всех трех схем установки вала двойкой жесткости применим общий способ подавления зоны неустойчивости между критическими скоростями путем увеличения внешнего демпфирования. В схеме 1, где этот способ единственный, указанная зона исчезает при  $\delta \geq 0,2$ . В схеме 2 увеличение податливости опор позволяет подавить неустойчивость при меньших значениях внешнего демпфирования, то есть для этой схемы зона неустойчивости между  $\beta_1$  и  $\beta_2$  может быть подавлена двумя способами — увеличением либо  $\delta$ , либо  $\alpha$ .

Что касается схемы 3, то она в указанном смысле «безразлична» к жесткости опор и внешнему демпфированию, так как при любом  $\alpha$  и любом малом (но не нулевом, а реальном)  $\delta$  неустойчивость может быть подавлена путем выбора коэффициента анизотропии  $\nu$  упругого поля опоры, близким по значению к  $\nu^0$ .

После подавления зоны неустойчивости между критическими скоростями возникает вопрос о ширине области устойчивой работы до окончательной потери устойчивости. В схеме 1 при  $\delta = 0,2$  потеря устойчивости происходит при значении  $\beta_{Г3} = 2,25$ . С ростом внешнего демпфирования  $\beta_{Г3}$  также растет, но, по-видимому, значения  $\delta > 0,2$  соответствуют специальным мерам по увеличению демпфирования (см. рис. 3). В схеме 2 с увеличением податливости опор  $\beta_{Г3}$  сначала увеличивается, достигая максимума при  $\alpha \approx 3$ , затем уменьшается. Ориентировочно зона устойчивости в 3–4 раза превышает среднюю критическую скорость. Увеличение внешнего демпфирования примерно линейно расширяет зону устойчивости, причем эта тенденция имеет место при любых значениях податливости опор (см. рис. 5). Наконец, в схеме 3 увеличение податливости опор резко сужает область устойчивости, доводя ее ширину до полутора критических скоростей ( $\delta = 0,1$ ) (см. рис. 8). Увеличение внешнего демпфирования также почти линейно расширяет зону устойчивости при всех  $\alpha$ . Максимальная ширина области устойчивого движения достигается при малых  $\alpha$  в случае, если опоры близки к изотропным ( $\nu \approx 0$ ); при большой податливости опор значение  $\nu$  в этом смысле безразлично.

Во всех трех схемах потеря устойчивости на первых двух границах происходит по форме прямой синхронной прецессии, окончательная же потеря устойчивости на третьей границе — по форме прямой несинхронной прецессии с частотами  $p_{3,1} = 0,5(\beta_1 + \beta_2)$  и  $p_{3,2} = 2\beta_{Г3} - 0,5(\beta_1 + \beta_2)$ , где  $\beta_{Г3}$  — скорость вращения на третьей границе.

Итак, с позиции устойчивости движения оптимальной следует признать схему 2 с невращающимися упругими опорами, так как она позволяет подавить зону неустойчивости между критическими скоростями и обеспечить устойчивую работу в широком диапазоне скоростей без специального введения внешнего демпфирования.

## Список литературы

1. Диментберг Ф. М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф. М. Диментберг. — М.: АН СССР, 1959. — 247 с.
2. Вибрации в технике: справ.: в 6 т. — М.: Машиностроение, 1980. — Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. — 544 с.
3. Цырлин А. Л. Динамика роторов двойкой жесткости / А. Л. Цырлин // Динамика гибких роторов. — М.: Наука, 1972.
4. Подшипник качения: А. с. 314009 СССР / Кельзон А. С., Лущик В. М., Циманский Ю. П. — Б. и., 1971. — № 27.

5. Кельзон А. С. Динамика ротора двоякой жесткости в упругих опорах / А. С. Кельзон, Б. Ф. Клочков // Динамика систем. — Горький, 1976. — Вып. 10.

6. Клочков Б. Ф. Вычислительные значения параметра на границе устойчивости решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (алгоритм № П001219) / Б. Ф. Клочков // Алгоритмы и программы: информ. бюл. — М.: ВИНТИ, 1975. — № 2.

**УДК 620.197:629.12(4)**

**В. Е. Леонов,**  
д-р техн. наук, профессор,  
Херсонская государственная морская академия;

**И. И. Рублев,**  
аспирант,  
Херсонская государственная морская академия

**ИССЛЕДОВАНИЕ КОРРОЗИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ КОРПУСОВ СУДОВ,  
ОБРАБОТАННЫХ ЭФФЕКТИВНЫМ НАПОЛНИТЕЛЕМ**

**STUDY OF CORROSION RESISTANCE OF METALLIC HULLS  
OF SHIPS TREATED BY EFFECTIVE FILLERS**

*В статье выполнен анализ существующих методов защиты металлических корпусов судов, разработано новое техническое решение по эффективному наполнителю, обладающему большей устойчивостью к коррозионной деструкции по сравнению со стандартными защитными покрытиями. Разработан и протестирован новый экологически безопасный для морской, окружающей среды наполнитель. Приведены практические способы использования данного покрытия, которое по сравнению с существующим стандартным покрытием обладает эластичностью. Данное покрытие не имеет аналогов в мире и обладает низкой стоимостью, поскольку в его состав входят отходы промышленности и сельского хозяйства. Покрытие, обладая высокой адгезией, способно удерживаться на металлической поверхности при различных параметрах внешней среды, что подтверждается проведенными экспериментами, описанными в данной статье.*

*In the article the analysis of existing methods for protecting metal hulls is carried out, a new technical solution for the effective filler having greater resistance to corrosive degradation in comparison with the conventional protective coatings is made. A new environmentally safe for marine, environmental filler is developed and tested. The practical uses of this coating, which as compared with the current standard coating is elastic are shown. This coverage does not have any existing analogues and has a relatively low cost because it is composed of industry and agriculture waste products. Covering having a high adhesion ability can keep on the metal surface with various parameters of the environment, as evidenced by the above experiments described in this article.*

*Ключевые слова: наполнитель, защитное покрытие, компонент наполнителя, сырая резина, агрессивная среда, коррозия, корпус, судно, металл, морская среда.*

*Key words: filler protective coating, filler component, crude rubber, aggressive environment, corrosion, corps, ship, steel, marine environment.*

**Введение**

Металлы защищают от коррозии различными способами, в зависимости от условий эксплуатации напылением или нанесением на их поверхность специальных материалов. В зависимости от типа защитной пленки покрытия подразделяют на лакокрасочные, оксидные, металлические,