

МОРСКИЕ И ВНУТРЕННИЕ ВОДНЫЕ ПУТИ, ГИДРОТЕХНИЧЕСКИЕ СООРУЖЕНИЯ И ПОРТЫ

УДК 532.546

Э. Н. Береславский,
д-р физ.-мат. наук, профессор,
Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации;

Е. В. Пестерев,
аспирант,
Санкт-Петербургский государственный
университет гражданской авиации

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ ИЗ КОТЛОВАНОВ И ВОДОХРАНИЛИЩ

MATHEMATICAL MODELING OF FLOW THROUGH TRENCHES AND WATER RESERVOIRS

В гидродинамической постановке рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости по закону Дарси из строительных котлованов, огражденных шпунтами Жуковского, через однородный и изотропный слой грунта, подстилаемый хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом, на кровле которого содержится непроницаемый участок. Для изучения инфильтрации на свободную поверхность грунтовых вод формулируется смешанная краевая многопараметрическая задача теории аналитических функций, которая решается с помощью метода Полубариновой-Кочкиной и способов конформного отображения областей специального вида, характерных для задач подземной гидромеханики. Рассматриваются предельные случаи течения.

The filtration from the pits, which are fenced rabbets of Zhukovsky through a soil layer consider. At the bottom of the soil is highly permeable pressure aquifer with nonpermeable site. Mixed multiparametric boundary value problem of the theory of analytic functions is formulated to study the infiltration of the free surface. The problem is solved using the Polubarinova-Cochina's method. The limiting cases are considered. They associated with the lack of one of the factors which characterize the simulated process.

Ключевые слова: фильтрация, грунтовые воды, шпунт, область комплексной скорости, конформные отображения.

Key words: filtration, groundwater, dam, groove, velocity hodograph, conformal mappings.

ИСЛЕДОВАНИЯ по изучению фильтрационных течений из строительных котлованов и водохранилищ, огражденных симметричными шпунтами Жуковского (см., например, обзоры [1; 2; 3, с. 585–648; 4]). При этом в одних случаях предполагалось, что водопроницаемый слой грунта имеет неограниченную мощность, в других нижележащий сильнопроницаемый напорный пласт моделировался одной или двумя дренами в форме горизонтальной щели Жуковского [5, с. 297–332]. В ряде работ изучалась свободная фильтрация, то есть течение без подпора, а в отдельных случаях — напорная, то есть наличием свободной поверхности пренебрегали. Во всех упомянутых исследованиях учет инфильтрации не производился. Кроме того, для решения задач авторы использовали разные приемы: применялась функция Жуковского и способ Ведерникова–Павловского, сводящие дело к конформному отображению прямолинейных многоугольников с последующим использованием формулы Кристоффеля–Шварца.

Отличие от названных исследований, ниже, как непосредственное продолжение и развитие предыдущих результатов автора [6, с. 529–533], изучается задача о течении жидкости из котлова-

нов через грунтовой массив конечной мощности, подстилаемый хорошо проницаемым напорным водоносным горизонтом, содержащим на своей кровле водонепроницаемый участок, при наличии инфильтрации на свободную поверхность. Исследуется наиболее общий случай движения, при котором на обоих водопроницаемых участках границы области фильтрации расход принимает экстремальные значения и точка нулевой скорости потока выходит на шпунт (что, по-видимому, до сих пор не встречалось в литературе). Отмечаются предельные случаи течения, связанные с отсутствием как подпора, непроницаемого включения или инфильтрации, так и случай вырождения котлованов в полубесконечную слева полосу затопления, исследованный ранее В. В. Ведерниковым [7, с. 619–622]. Приводятся результаты для схемы, возникающей при отсутствии критических точек в том случае, когда скорость обтекания на конце шпунта оказывается конечной; полученное решение является некоторым аналогом классической задачи Жуковского [5].

Для решения смешанной краевой многопараметрической задачи теории аналитических функций используется метод Полубариновой-Кочиной [1–4], а также разработанные для областей специального вида [8] способы конформного отображения круговых многоугольников [9, с. 296–301; 10, с. 590–594], которые весьма характерны для задач подземной гидромеханики. Учет характерных особенностей движения позволяет представить решения через специальные, а в ряде случаев элементарные функции, что делает их применение простым и удобным.

На основе построенных точных аналитических зависимостей и посредством численных расчетов проводится гидродинамический анализ влияния всех физических параметров схемы на картину явления и отмечаются некоторые особенности разрабатываемых моделей.

1. Основная модель. Постановка задачи. Рассматривается плоское установившееся течение из котлована (водохранилища) AA' шириной $2l$, огражденного симметричными шпунтами Жуковского одинаковой длины S , через водопроницаемый слой грунта мощности T с нижележащим водоносным горизонтом $E'E$, содержащим подземные или артезианские воды, напор в котором имеет постоянное значение H_0 (рис. 1). На кровле этого пласта расположен водонепроницаемый участок $D'D$, моделируемый горизонтальным отрезком длины $2L$. В силу симметрии картины движения ограничимся изучением правой половины области фильтрации $ABCDEGR$.

Грунтовые воды, обтекая шпунт ARG под действием разности напоров в котловане и нижележащем хорошо проницаемом водоносном горизонте, поднимаются за ним на некоторую высоту RG и, преодолевая точку M нулевой скорости на шпунте, образуют свободную поверхность GE , на которую поступают инфильтрационные воды с интенсивностью ε ($0 < \varepsilon < 1$), отнесенной к коэффициенту фильтрации грунта $k = \text{const}$. Задача состоит в определении положения кривой депрессии GE и, стало быть, высоты RG поднятия грунтовой воды за шпунтом, то есть величины $S - d$.

Будем полагать, что движение грунтовых вод подчиняется закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации k и происходит в однородном и изотропном грунте, который считается несжимаемым. Скорость обтекания на острие шпунта v_R принимается бесконечной (до п. 5), глубина воды H в котловане остается неизменной во времени.

С математической точки зрения задача состоит в нахождении комплексного потенциала течения $\omega = \varphi + i\psi$ (φ — потенциал скорости; ψ — функция тока) как аналитической внутри области фильтрации функции комплексной координаты $z = x + iy$ при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} AB: y = 0, \varphi = -H; \quad BC: x = 0, \psi = 0; \quad CD: y = -T, \psi = 0; \quad AG: x = l, \psi = Q; \\ DE: y = -T, \varphi = -H_0; \quad GE: \varphi = -y - T, \psi = Q + \varepsilon(x - l), \end{aligned} \tag{1}$$

где Q — искомый фильтрационный расход из котлована. Исследование осуществляется в терминах приведенных величин ω и z , связанных с одноименными фактическими величинами ω_ϕ и z_ϕ посредством равенств $\omega = \omega_\phi / kT$, $z = z_\phi / T$.

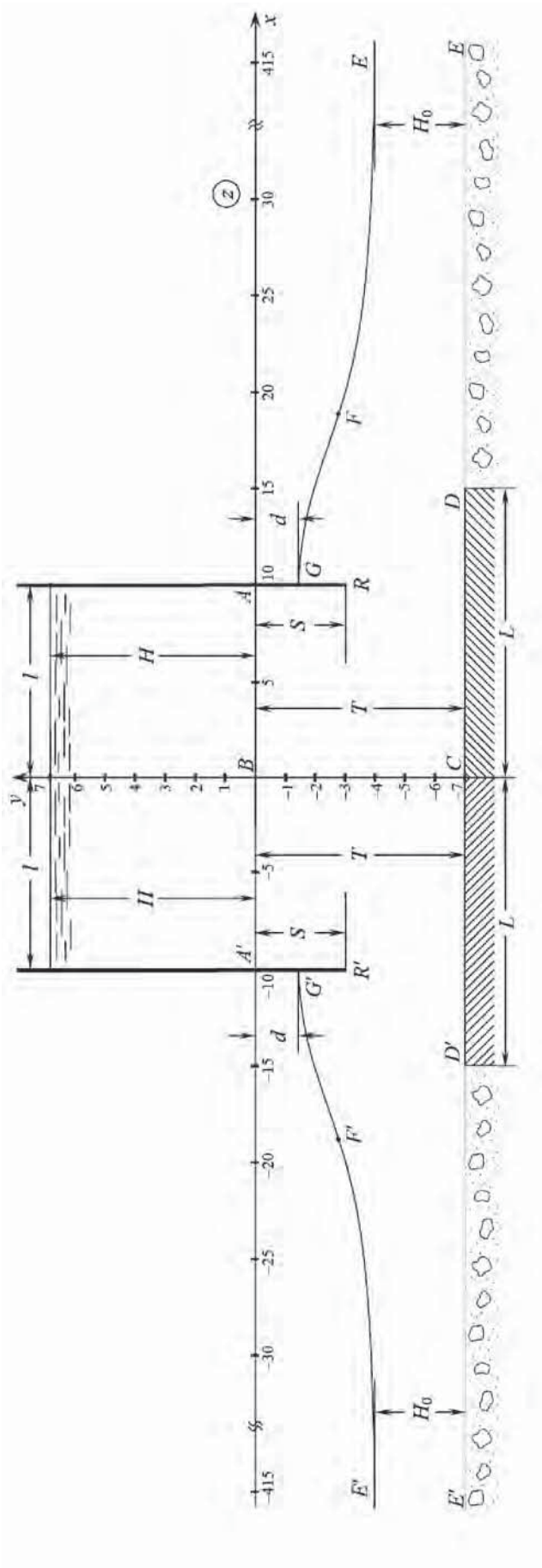


Рис. 1

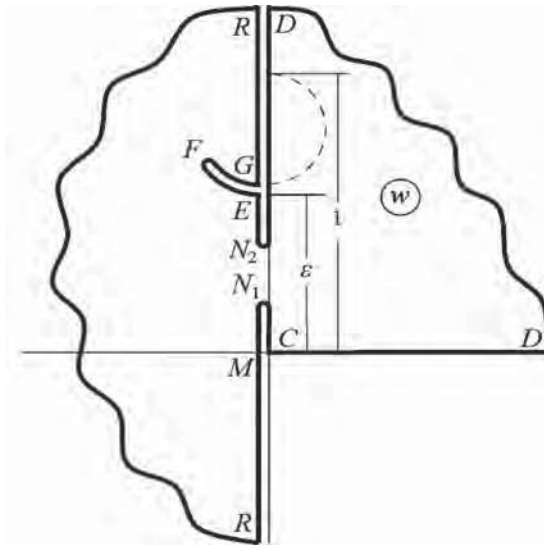


Рис. 2

2. Построение решения краевой задачи. Обратимся к области комплексной скорости w , соответствующей краевым условиям (1). Эта область, являющаяся круговым многоугольником с тремя разрезами, вершины N_1 и N_2 двух из которых соответствуют экстремумам функции тока на непроницаемых участках AB и DE , принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [8] и совпадает с таковой для случая, рассмотренного ранее [6; 11, с. 130–138] (рис. 2). Однако, в отличие от [6; 11], в данном случае на границе области движения появляется дополнительная угловая точка — точка B ; общее число особых точек становится равным девяти, что сильно усложняет задачу.

Для решения краевой задачи используем метод Полубариновой-Кочинной, который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений класса Фукса [1–4]. Вводится прямоугольник вспомогательной параметрической переменной плоскости τ ($0 < \operatorname{Re}\tau < 1/2$, $0 < \operatorname{Im}\tau < 0,5\rho$, $\rho(k) = K'/K$, $K' = K(k')$, $k' = \sqrt{1-k^2}$, где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода при модуле k [27,28] при соответствии точек $\tau_E = 0$, $\tau_G = 0,5$, $\tau_C = 0,5(1 + i\rho)$, $\tau_D = 0,5i\rho$) и функции

$$\Omega = \frac{d\omega}{d\zeta}, \quad Z = \frac{dz}{d\zeta}. \quad (2)$$

Определяя характеристические показатели функций (2) около регулярных особых точек [1–4] и принимая во внимание то, что функция $w = d\omega/dz = \Omega/Z$ имеет прежний вид [6; 11], придем к зависимостям:

$$\begin{aligned} \Omega &= -\sqrt{\varepsilon}N \frac{\chi^+(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad Z = iN \frac{\chi^-(\tau)}{\Delta(\tau)}, \quad \chi^\pm(\tau) = (1 + \sqrt{\varepsilon})Y_1(\tau) \pm (1 - \sqrt{\varepsilon})Y_2(\tau), \\ Y_{1,2}(\tau) &= \vartheta_0^{-3}(\tau)\vartheta_1(\tau \pm i\gamma)\vartheta_2(\tau \pm i\alpha)\vartheta_2(\tau \mp i\beta) \exp(\pm i\pi\tau), \\ \Delta(\tau) &= \operatorname{sn}(2K\tau, k) \sqrt{\left[1 - (1 - k'^2 A^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)\right] \left[1 - (1 - k'^2 B^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)\right]}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sqrt{\varepsilon} = \operatorname{th} \pi(0,5\rho + \beta - \alpha - \gamma). \quad (4)$$

Здесь $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция Якоби (синус) при модуле k ; $\vartheta_0(\tau)$, $\vartheta_1(\tau)$ и $\vartheta_2(\tau)$ — тета-функции с параметром $q = \exp(-\pi\rho)$, который однозначно связан с модулем k ; $N > 0$ — масштабная постоянная моделирования; $A = \operatorname{sn}(2Ka, k')$, $B = \operatorname{sn}(2Kb, k')$, a и b — неизвестные ординаты точек A и B области τ . В представлениях (3) постоянные конформного отображения α , β и γ , которые связаны соотношением (4), подчинены условиям:

$$0 < \alpha < r < \beta < m < a < b < 0,5 \rho; 0 < \gamma < 0,5 \rho, \quad (5)$$

регламентирующим положение на границе области течения точек нулевой скорости M и острия шпунта R , а также N_1 и N_2 ; m и r — неизвестные ординаты точек M и R в плоскости τ .

Можно проверить, что функции (3) удовлетворяют условия (1), переформулированные в терминах функций $d\omega/dt$ и dz/dt , таким образом являющиеся параметрическим решением исходной краевой задачи.

Запись соотношений (3) для разных участков границы области τ с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к замыканию области движения и тем самым служит контролем вычислений.

В результате получаем выражения для задаваемых и искомым геометрических и фильтрационных характеристик модели:

$$\int_r^a Y_{RA} dt = S, \quad \int_a^b X_{AB} dt = l, \quad \int_0^{0,5} X_{CD} dt = L, \quad \int_b^{0,5\rho} Y_{BC} dt = T, \quad (6)$$

$$\int_b^{0,5\rho} \Phi_{BC} dt - \int_0^{0,5} \Phi_{CD} dt = H - H_0,$$

$$d = T - H_0 - \int_0^{0,5} \Phi_{EG} dt \quad (7)$$

и координат точек кривой депрессии EG :

$$x_{EG}(u) = l + \int_u^{0,5} X_{EG} dt, \quad y_{EG}(u) = -d + \int_u^{0,5} Y_{EG} dt, \quad 0 \leq u \leq 0,5. \quad (8)$$

Контролем счета являются другие выражения для величин d , L и фильтрационного расхода Q :

$$d = T - H_0 - \int_0^{0,5} Y_{EG} dt, \quad L = l - \int_0^{0,5} X_{EG} dt - \int_0^{0,5\rho} X_{DE} dt, \quad (9)$$

$$Q = \int_0^{0,5\rho} \Psi_{DE} dt - \varepsilon \int_0^{0,5} X_{EG} dt.$$

В формулах (6)–(9) подынтегральные функции — выражения правых частей равенств (3) на соответствующих участках контура области τ .

3. Анализ численных результатов для основной фильтрационной модели. Представления (3), (6)–(9) содержат семь неизвестных постоянных: ординаты a , b , r прообразов точек A , B , R в плоскости τ , параметры конформного отображения α , β , γ , удовлетворяющие соотношению (4) и неравенствам (5), а также модуль k ($0 < k < 1$) и постоянную моделирования N . Для их определения при заданных S , l , L , H и T служит система уравнений (6), наряду с которыми используются соотношения:

$$w^{-1}(0,5 + ir) = 0, \quad \int_0^{0,5} (\Phi_{EG} + \Phi_{CD}) dt + \int_0^a \Phi_{GA} dt + \int_b^{0,5\rho} \Phi_{BC} dt = 0. \quad (10)$$

Первое из этих соотношений означает, что скорость на конце шпунта обращается в бесконечность, а второе непосредственно вытекает из рассмотрения граничных условий (1). После определения неизвестных постоянных находятся искомые величины d и Q по формулам (7) и, наконец, по формулам (8) рассчитываются координаты точек свободной поверхности EG .

На рис. 1 изображена картина течения, рассчитанная при $\varepsilon = 0,6$, $T = 7$, $S = 3$, $H_0 = 3$, $L = 15$, $H = 7$, $l = 10$ (базовые значения). В табл. 1 и 2 (варьируется в допустимом диапазоне один из указанных параметров, а остальные фиксируются базовыми значениями) приведены результаты расчетов влияния определяющих физических параметров ε , T , S , H_0 , L , H и l на глубину d (отрицательные величины d означают, что свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс) и расход Q .

Таблица 1

ε	d	Q	T	d	Q	S	d	Q	H_0	d	Q
0,5	2,651	0,182	6,5	1,349	0,234	2,0	1,726	0,635	2,0	3,155	0,038
0,6	1,804	0,394	7,0	1,804	0,394	2,5	1,745	0,563	4,0	0,441	0,769
0,7	0,586	0,457	7,5	2,299	0,457	3,5	1,844	0,255	5,0	-0,93	1,159
0,8	-1,195	0,094	8,0	2,745	0,627	4,0	1,873	0,129	6,0	-2,35	1,815

Таблица 2

L	d	Q	H	d	Q	l	d	Q
14	2,555	0,086	4,0	0,650	1,815	10,0	1,804	0,394
16	1116	0,599	5,0	1,070	1,159	10,3	2,018	0,320
17	0,413	0,888	6,0	1,441	0,769	10,6	2,229	0,253
18	-0,256	1,084	8,0	2,155	0,038	11,0	2,478	0,230

Анализ данных таблиц и графиков позволяет сделать следующие выводы.

Прежде всего обращает на себя внимание одинаковый качественный характер зависимостей величин d и Q от параметров T и l , S и H и в то же время противоположное поведение искомых характеристик при изменении параметров S и H с одной стороны и от L и H_0 — с другой.

Увеличение интенсивности инфильтрации, ширины непроницаемого включения и напора в нижележащем пласте и уменьшение мощности слоя, длины шпунта, напора воды в котловане и его ширины приводят к уменьшению глубины d , то есть к увеличению ординаты точки G выхода кривой депрессии из-под шпунта. Так, согласно данным табл. 1 и 2 увеличению параметров ε , S , H_0 и l в 1,6, 2,0, 2,0 и 1,1 раза сопутствует изменение величины d в 2,2, 1,1, 1,3 и 1,6 раза соответственно. Однако наибольшее влияние на глубину d оказывает непроницаемый участок: данные табл. 2 показывают, что при возрастании ширины L всего на 28 % глубина d увеличивается почти в 10 раз.

При $\varepsilon = 0,8$, $H_0 = 5$ и 6 и $L = 18$, то есть при достаточно больших значениях параметров ε , H_0 и L , свободная поверхность поднимается выше оси абсцисс, при этом величина d принимает отрицательные значения. Если ввести безразмерную величину $h(d) = (S - d)/S$, $h(S) = 0$, характеризующую относительную высоту поднятия грунтовой воды за шпунтом, то для указанных значений параметров ε , H_0 и L получаем $h(-1,1945) = 1,3981$, $h(-0,9297) = 1,3099$, $h(-2,3500) = 1,7833$ и $h(-0,2560) = 1,0853$ соответственно, причем величина h растет с увеличением ординаты точки G выхода кривой депрессии из-под шпунта.

Зависимости глубины d от параметров T , H_0 , L и H близки к линейным.

Что касается расхода, то с увеличением ширины непроницаемого включения величина Q также возрастает: из табл. 2 следует, что увеличение параметра L в 1,28 раза влечет увеличение расхода более чем в 12 раз. Таким образом, выявляется значительное подпирющее воздействие непроницаемого участка по отношению к фильтрации из котлована.

Подобное поведение расхода наглядно прослеживается как с увеличением мощности слоя, ширины котлована и напора в нижележащем горизонте, так и с уменьшением длины шпунта и напора в бьефе. Из табл. 2 вытекает, что уменьшению параметра H всего в 2 раза сопутствует увеличение расхода Q почти в 48 раз, что свидетельствует о наибольшем влиянии на расход напора воды в котловане

4. Предельные случаи. 1. *Случай $H_0 = 0$.* Остановимся прежде всего на случае отсутствия подпора, то есть движении при $H_0 = 0$. Решение для этого предельного случая получается из зависимостей (3), (6)–(9) при $\gamma = \gamma_* = 0$. При таком значении параметра γ круговой разрез EG области w , трансформируясь, вырождается в правую полуокружность (штриховая линия на рис. 2), и таким образом исходная область превращается в круговой шестиугольник, у которого выпадает правая часть полукруга $|w - 0,5i(1 + \varepsilon)| < 0,5(1 - \varepsilon)$. В плоскости течения z при $\gamma = \gamma_*$ кривая депрес-

сии выполаживается в точке E , с которой сливается ее точка перегиба F , и выходит на кровлю нижележащего горизонта под прямым углом.

2. Случай $l = \infty$. Рассмотрим случай, когда ширина котлована неограниченно возрастает. Если совершить преобразование $z' = z + l$, переведя точку A' в начало координат, и зафиксировать все физические параметры модели, то по мере возрастания ширины котлована l постоянная конформного отображения $b \rightarrow b_* = 0,5 \rho$. В пределе при $l = \infty$ параметры $b = b_*$, $B = 1$. В плоскости движения z точки B и C сливаются на бесконечности, так что область фильтрации становится полубесконечной слева полосой затопления. Из (3), (6)–(9) при $b = b_*$ вытекают результаты, полученные ранее [6; 11].

3. Случай $L = 0$. Если отсутствует непроницаемый участок на кровле нижележащего водоносного горизонта, то последний на всем протяжении становится хорошо проницаемым. При слиянии точек C и D в области комплексной скорости w ее левая полуплоскость отсекается, круговой разрез EG переходит в правую полуплоскость, а исходная область трансформируется в круговой треугольник (рис. 3). В плоскости движения z точка D , сливаясь с точкой C , выходит на ось ординат, а прямоугольник плоскости τ преобразуется в полуполосу $0 < \text{Re}\tau < 0,5$, $0 < \text{Im}\tau < \infty$, поскольку параметр $\rho = K'/K = \infty$, $K = 0,5 \pi$.

Решение для этого предельного случая получается из формул (3), (6)–(9), если в них положить $k = 0$ и учесть, что при этом эллиптические функции вырождаются в тригонометрические, а тета-функции обрываются на своих первых членах или константах:

$$\Omega = -\varepsilon N \frac{\sin 2r' \sin(r - m')}{\sin 2m' \cos \tau \Delta(\tau)}, \quad Z = iN \frac{\sin 2(\tau - r')}{\cos \tau \Delta(\tau)}, \quad (11)$$

$$\Delta(\tau) = \sqrt{(a - \sin^2 \tau)(b - \sin^2 \tau)(c - \sin^2 \tau)}, \quad \varepsilon = \text{tg } 2m' \text{ctg } 2r'.$$

Здесь $m' = \arcsin \sqrt{m}$, $r' = \arcsin \sqrt{r}$, $m', r', c' (0 < m' < r' < a' < b' < c' < 0,5\pi)$ — прообразы точек M, R, C на оси абсцисс плоскости τ . Этот случай подробно описан ранее [12, с. 1032–1040], где дан анализ влияния всех физических параметров модели.

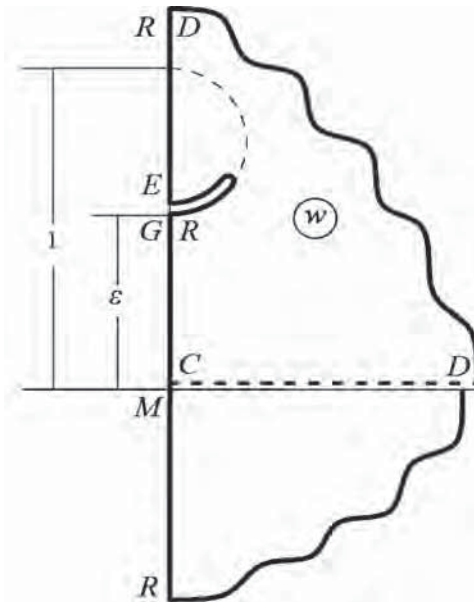


Рис. 3

4. Случай $\varepsilon = 0$. В рамках задачи $L = 0$ остановимся на случае отсутствия инфильтрации. Учитывая связь между параметрами m' и r' , отмеченную в (11), видим, что в случае, когда $\varepsilon = 0$, решение задачи вытекает из зависимостей (11) при $m' = 0$, то есть когда в плоскости τ точки кривой G и E сливаются в начале координат с точкой M нулевой скорости.

Таким образом, получается решение задачи, впервые рассмотренной В. В. Ведерниковым [7], только другим способом.

5. Случай конечной величины скорости обтекания на конце шпунта. Анализ задачи Жуковского. В рамках краевой задачи (1) рассмотрим случай, когда скорость обтекания на конце шпунта v_R , $0 < v_R < \varepsilon$ конечна и функция тока на водопроницаемых участках AB и DE не имеет экстремумов. Тогда в области комплексной скорости w исчезают оба вертикальных разреза, левая полуплоскость отсекается, как и ранее в случае $L = 0$, однако, в отличие от последнего, участок MR переносится в первый квадрант (штриховая линия на рис. 3). В результате исходная область превращается в круговой пятиугольник.

Параметрическое решение задачи имеет прежний вид (3) с заменой интегралов $Y_{1,2}(\tau)$ и постоянных конформного отображения α и β на следующие:

$$Y_{1,2}(\tau) = \vartheta_0^{-1}(\tau)\vartheta_1(\tau \pm i\gamma) \exp(\pm i\pi\tau),$$

$$\alpha = \beta = 0,5(1 + i\rho).$$
(12)

Решение аналогичной задачи для случая отсутствия подпора вытекает из представлений (3), (12) при $\gamma = \gamma_*$.

Анализ проведенных численных результатов показывает, что в случае $v_R < \infty$ сохраняется качественный характер зависимостей фильтрационного расхода от физических параметров схемы, свойственный случаю $v_R = \infty$. Так, например, наблюдается тот же, что и ранее, характер поведения расхода от величин T и l с одной стороны и противоположный характер от параметров S и H — с другой. Существенное влияние на расход Q по-прежнему оказывают инфильтрация, непроницаемое включение и мощность слоя.

На рис. 4 изображена картина движения, рассчитанная при $\varepsilon = 0,5$, $T = 6$, $S = 3$, $L = 16,2$, $H = 3$, $l = 15$.

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что для всех расчетных вариантов оказывается $d = S$ и, следовательно, величина $h(d) = h(S) = 0$. Это означает, что в плоскости течения точка G выхода кривой депрессии из-под шпунта сливается с точкой R его остря; из рассмотрения области комплексной скорости w (рис. 3) следует, что в таком случае скорость на конце шпунта равна интенсивности инфильтрации: $v_R = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$.

Если совершить преобразование $\tau' = 0,5 + i\rho\tau$, переводящее прямоугольник вспомогательной переменной τ в ему подобный с параметром $\rho' = 1/\rho = K/K'$, то соответствующее основной фильтрационной схеме неравенство на параметры (5) примет вид

$$0 < b' < a' < r' < 0,5,$$
(13)

где b' , a' , r' — абсциссы прообразов точек B , A , R в плоскости τ .

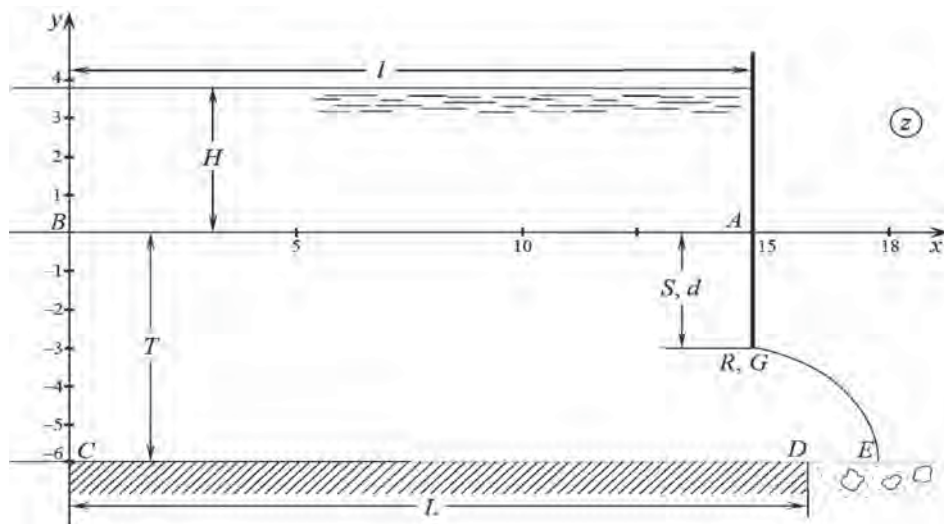


Рис. 4

Расчеты показывают, что для любого значения интенсивности инфильтрации ε ($0 < \varepsilon < 1$) соотношение $d = S$ выполняется лишь для единственного значения величины r' — ее предельного значения r'_* , когда на плоскости τ' сливаются точки G и R : $r' = r'_* = 0,5$. Все другие допустимые значения $r' < r'_*$ приводят к несогласованности с реальной картиной течения — соотношению $d > S$, то есть к отрыву потока.

Подобный результат в предельном для рассматриваемой модели случае, когда водопроницаемый слой грунта имеет неограниченную мощность, отсутствует непроницаемый участок и инфильтрация, то есть при $T = \infty$ ($k' = 0, k = 1$), $L = 0$ ($b' = b'_* = 0$) и $\varepsilon = 0$ ($m' = 0$), был впервые получен в свое время Н. Е. Жуковским [5]. Решение для этого предельного случая получается из зависимостей (3), (12), если в них положить $K = \infty, K' = \pi/2, k' = 0, k = 1, b' = 0, q' = 0$ и учесть, что при этом эллиптические функции вырождаются в гиперболические, а тета-функции, которые на этот раз характеризуются параметром $q' = 0$, обрываются на своих первых членах или константах.

Таким образом, в предельном случае изучаемой схемы получается решение задачи Жуковского, только иным путем.

Список литературы

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М.: Гостехиздат, 1952. — 676 с.; 2-е изд. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
2. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). — М.: Наука, 1969. — 545 с.
3. Михайлов Г. К. Движение жидкостей и газов в пористых средах / Г. К. Михайлов, В. Н. Николаевский // Механика в СССР за 50 лет. — М.: Наука, 1970. — Т. 2.
4. Кочина П. Я. Избранные тр. Гидродинамика и теория фильтрации / П. Я. Кочина. — М.: Наука, 1991. — 351 с.
5. Жуковский Н. Е. Просачивание воды через плотины / Н. Е. Жуковский // Жуковский Н. Е. Собр. соч. — М.: Гостехиздат, 1950. — Т. 7.
6. Береславский Э. Н. О некоторых гидродинамических моделях, связанных с задачей Жуковского об обтекании шпунта / Э. Н. Береславский // Докл. РАН. — 2013. — Т. 448, № 5.
7. Ведерников В. В. Фильтрация при наличии дренирующего или водоносного слоя / В. В. Ведерников // Докл. АН СССР. — 1949. — Т. 69, № 5.
8. Кочина П. Я. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений класса Фукса и некоторые задачи подземной гидромеханики / П. Я. Кочина, Э. Н. Береславский, Н. Н. Кочина. — М.: Ин-т проблем механики РАН, 1996. — Ч. 1. — 122 с. — (Препринт № 567).
9. Береславский Э. Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках / Э. Н. Береславский // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 3.
10. Береславский Э. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях класса Фукса, встречающихся в задачах механики жидкостей и газов / Э. Н. Береславский // Дифференциальные уравнения. — 2012. — Т. 48, № 4.
11. Береславский Э. Н. О некоторых гидродинамических схемах, связанных с обтеканием шпунта Жуковского / Э. Н. Береславский, Е. В. Пестерев // Вестник СПбГУ. Сер. 1. «Математика, механика, астрономия». — 2013. — Вып. 1.
12. Береславский Э. Н. О фильтрации жидкости из котлована, огражденного шпунтами / Э. Н. Береславский // ИФЖ. — 2013. — Т. 86, № 5.
13. Аравин В. И. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде / В. И. Аравин, С. Н. Нумеров. — М.: Гостехиздат, 1953. — 616 с.